

Experimentelle Realisierung eines Bose-Einstein-Kondensats

Diplomarbeit
von
Florian Schreck

Arbeitsgruppe Prof. Dr. G. Rempe
Fakultät für Physik
Universität Konstanz
April 1998

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die experimentelle Realisierung von Bose-Einstein-Kondensaten aus Rubidium Gas. Als die Arbeit begonnen wurde, war die Atomquelle, welche aus einem Doppel-MOT-System besteht, vollendet und eine magnetische Falle vom Ioffe-Pritchard Typ wurde gerade aufgebaut. Um die Kondensation zu erreichen ist es nötig, die in der magnetischen Falle gespeicherte Atomwolke weiter abzukühlen. Dazu werden die Atome einem Radiofrequenzfeld ausgesetzt, welches die energiereichsten Atome aus der Falle entfernt, und so eine Abkühlung durch Verdampfung bewirkt. Dieser Prozeß muß gut verstanden sein um ihn optimieren zu können. Deswegen wurde eine Simulation des Verdampfungskühlvorgangs erstellt, die auf der Lösung der Boltzmann-Gleichung beruht. Es zeigt sich, daß die Simulation hervorragend mit dem Experiment übereinstimmt. Der Ablauf der Verdampfungskühlung ist stark von Atomverlusten durch inelastische Stöße beeinflusst. Die Verlustrate ist durch dipolare Relaxationsprozesse bei zwei-Körper-Stößen dominiert. Die zugehörige Verlustratenkonstante ist aus theoretischen Rechnungen nur bis auf eine Größenordnung genau bekannt. Durch Vergleich des Ablaufs der Verdampfungskühlung im Experiment und in der Simulation ließ sie sich zu $5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ bestimmen. Mit der Simulation konnte außerdem unter verschiedenen Optimierungsverfahren das beste ausgewählt und schließlich erfolgreich auf das Experiment übertragen werden.

Nach erfolgter Optimierung der Verdampfungskühlung verläuft der Kühlvorgang folgendermaßen: Es werden Radiowellen ausgestrahlt, deren Frequenz während 21 s von 50 MHz auf 1 MHz abfällt. Vom Beginn der Verdampfungskühlung bis zum Einsetzen der Kondensation sinkt die Anzahl der Atome von $6,5 \cdot 10^8$ auf 10^6 und die Temperatur von $470 \mu\text{K}$ auf 577 nK . Die Dichte erhöht sich von $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ auf $4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Die elastische Stoßrate steigt von 20 s^{-1} auf über 700 s^{-1} , wodurch sich die Verdampfungskühlung beschleunigt. Die Phasenraumdicke der Atomwolke wird um 7 Größenordnungen erhöht, bis sie den kritischen Wert von $n\lambda^3 = 2,61$ überschreitet. Nun tritt ein Phasenübergang auf und ein Bose-Einstein-Kondensat entsteht. Es konnten Bose-Einstein-Kondensate aus mehr als 10^5 Atomen bei Dichten von $4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ erzeugt werden. Die kritische Temperatur liegt bei 577 nK . Das Verhalten der Kondensate während einer freien Expansion wurde untersucht.

Um die erzeugten Kondensate nachweisen zu können wurde ein optisches Abbildungssystem konstruiert, das flexibel einzusetzen ist, da es nach einem Baukastenprinzip aufgebaut ist. Für den zerstörungsfreien Nachweis der Kondensate kann es unter Einsatz von phasenverschiebenden optischen Bauteilen auch als Phasenkontrastmikroskop betrieben werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	3
2.1	Theorie der Bose-Einstein-Kondensation	3
2.1.1	Das ideale homogene Bose-Einstein-Kondensat	4
2.1.2	Das ideale inhomogene Bose-Einstein-Kondensat	7
2.1.3	Bose-Einstein-Kondensation endlicher Systeme	8
2.1.4	Bose-Einstein-Kondensation in verschiedenen Ensembles	8
2.1.5	Bose-Einstein-Kondensation nichtidealer Gase	10
2.1.6	Expansion eines Bose-Einstein-Kondensats	12
2.1.7	Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats	14
2.2	Theorie der Verdampfungskühlung	16
2.2.1	Prinzip der Verdampfungskühlung	16
2.2.2	Verdampfungskühlung in einer magnetischen Falle	18
2.2.3	Verlust- und Heizprozesse	20
2.2.4	Simulation der Verdampfungskühlung	22
2.2.5	Untersuchungen mit der Simulation	31
2.2.6	Optimierung des Verlaufs der Abschneideenergie	35
3	Der experimentelle Aufbau	37

3.1	Wahl der Atomsorte	37
3.2	Das Doppel-MOT System	37
3.3	Die magnetische Falle	40
3.4	Verdampfungskühlen	45
3.5	Das Abbildungssystem	45
3.6	Phasenkontrastmikroskopie	48
4	Ergebnisse	52
4.1	Verdampfungskühlung	52
4.1.1	Bestimmung der Anfangsparameter	52
4.1.2	Vergleich von Theorie und Experiment	56
4.2	Bose-Einstein-Kondensation	60
5	Ausblick	65
6	Anhang	66
6.1	Berechnung thermodynamischer Größen	66
6.2	Herleitung der T, N Messung	67
6.3	Theorie des Phasenkontrastmikroskops	68
6.3.1	Analytische Rechnung	68
6.3.2	Numerische Rechnung	70

Kapitel 1

Einleitung

1924 sandte Bose einen Artikel an Einstein, in dem er die Planck-Verteilung mit rein statistischen Argumenten ableitet [Bos24]. Einstein übertrug das Konzept auf ein ideales Gas von Bosonen [Ein24] (Teilchen mit ganzzahligem Spin) und bemerkte, daß die angeregten Zustände nur eine endliche Zahl von Teilchen pro Volumen aufnehmen können. Sind mehr Teilchen pro Volumen im System, müssen die überschüssigen Teilchen den Grundzustand besetzen. Die Besetzung des Grundzustandes beginnt unterhalb einer kritischen Temperatur plötzlich zu wachsen. Dies kann als Phasenübergang interpretiert werden und wird als Bose-Einstein-Kondensation bezeichnet. Das Überraschende an ihr ist, daß der Grundzustand makroskopisch besetzt wird, bevor die mittlere Energie unter den Abstand des ersten angeregten Niveaus zum Grundzustand gefallen ist. In diesem Fall würden selbst klassische Teilchen vorzugsweise den Grundzustand besetzen. Die Bose-Einstein-Kondensation setzt ein, sobald die thermische de Broglie Wellenlänge der Teilchen größer wird als ihr mittlerer Abstand. Diese Bedingung ergibt für jede Dichte eine kritische Temperatur, bei welcher der Phasenübergang auftritt.

Supraflüssiges Helium oder Cooper-Paare in Supraleiter können als Bose-Einstein-Kondensate betrachtet werden. Allerdings handelt es sich dabei um stark wechselwirkende Systeme, bei denen nur ein kleiner Prozentsatz der Bosonen im Grundzustand ist. Die theoretische Beschreibung ist sehr schwierig. Näher an die ursprüngliche Vorstellung von Einstein kommen Excitonengase, in denen die Wechselwirkung zwischen den Quasiteilchen gering ist. 1993 konnte in solchen Gasen ein Bose-Einstein-Kondensat nachgewiesen werden [Lin93]. Dieses System ist theoretisch aber schlecht verstanden und kann außerdem experimentell nur schwer vermessen werden. Unter den Gasen bietet sich Wasserstoff wegen seiner geringen Masse und damit großen de Broglie Wellenlänge zur Bose-Einstein-Kondensation an. Die Experimente die damit durchgeführt wurden haben wichtige Erkenntnisse über die magnetische Speicherung und Kühlung von Atomen gebracht, waren aber nicht von Erfolg gekrönt [Gre84], [Sil86], [Gri95].

1995 konnten Bose-Einstein-Kondensate in verdünnten Alkali Gasen erzeugt werden [And95], [Bra95], [Dav95a]. Der Durchbruch gelang, als man optische Kühlmethoden mit Verdampfungskühlung kombinierte. Die Atome werden in einer magneto-optischen Falle, die sich im Ultrahochvakuum befindet, gesammelt und vorgekühlt. Anschließend transferiert man sie in eine magnetische Falle, in der Verdampfungskühlen stattfinden kann. Beim Verdampfungskühlen werden selektiv die energiereichsten Teilchen entfernt. Die übriggebliebenen Teilchen verteilen die Energie durch Stöße wieder gleichmäßig, wodurch die Temperatur absinkt und wobei auch neue hochenergetische Teilchen entstehen, die wiederum entfernt werden. Falls das Potential eine geeignete Form hat, schrumpft die Atomwolke bei sinkender Temperatur, so daß die Dichte steigt. Beide Prozesse führen auf den Phasenübergang zu. Falls Teilchenverluste durch andere Prozesse als dem Verdampfen nicht zu stark sind, können durch Optimieren des Verdampfungskühlvorgangs Bose-Einstein-Kondensate erzeugt werden.

In dem hier vorgestellten Experiment konnte die Bose-Einstein-Kondensation von Rubidium erreicht werden. Die Verdampfungskühlung wurde eingehend untersucht und erste Experimente mit dem Kondensat durchgeführt.

In Kapitel 2.1 werden die theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation erklärt. In Kapitel 2.2 wird eine Simulation des Verdampfungskühlvorgangs vorgestellt. Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Aufbau des Experiments. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse vorgestellt.

Kapitel 2

Theorie

Bei der Bose-Einstein-Kondensation handelt es sich um einen Phasenübergang in einem bosonischen System. Der Phasenübergang führt von einem Aggregatzustand, in dem der Grundzustand nur schwach besetzt ist, zu einem Zustand, bei dem der Grundzustand einen wesentlichen Anteil der Teilchen des Systems enthält. Die Teilchen im Grundzustand bilden das Bose-Einstein-Kondensat. Die Bose-Einstein-Kondensation wird im Folgenden immer im Hinblick auf das Experiment behandelt, das heißt es wird die Bose-Einstein-Kondensation eines atomaren Gases betrachtet. Im ersten der beiden folgenden Abschnitte wird erklärt unter welchen Bedingungen ein Bose-Einstein-Kondensat entsteht und welche Eigenschaften es hat. Da zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats in dem hier beschriebenen Experiment die Verdampfungskühlung eingesetzt wird, erfolgt anschließend eine Erklärung dieses Kühlverfahrens. Insbesondere wird eine Simulation der Verdampfungskühlung vorgestellt.

2.1 Theorie der Bose-Einstein-Kondensation

Zunächst wird die Bose-Einstein-Kondensation im theoretisch am einfachsten zu behandelnden Fall beschrieben. Dazu wird ein ideales homogenes Gas im großkanonischen Ensemble und im thermodynamischen Limes betrachtet. Diese Behandlung zeigt bereits die wesentlichen Eigenschaften eines Bose-Einstein-Kondensats, beschreibt jedoch die wirklichen Experimente nur unzulänglich. Deswegen wird anschließend skizziert, wie die Theorie den Experimenten besser angepaßt werden kann und wie sich die theoretischen Vorhersagen dadurch ändern. Insbesondere wird dazu beachtet, daß die Atome in inhomogenen Potentialen gefangen werden und anschließend, daß nur Experimente mit einer endlichen Anzahl von Atomen durchführbar sind. Daran schließt sich eine Diskussion der Gültigkeitsbereiche der für die Beschreibung der Bose-Einstein-Kondensation verwendeten thermodynamischen Gesamtheiten an. Abschließend wird die Dichteverteilung des Bose-Einstein-

Kondensats unter Beachtung der endlichen Streulänge der Atome berechnet und die Änderung dieser Verteilung in zeitabhängigen Potentialen betrachtet. Daraus ergibt sich eine einfache Methode für den Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats.

2.1.1 Das ideale homogene Bose-Einstein-Kondensat

Das Auftreten einer makroskopischen Besetzung des Grundzustands kann am Einfachsten für ein ideales Gas in einem homogenen Potential hergeleitet werden, wenn dabei das großkanonische Ensemble und der thermodynamische Limes verwendet werden [Hua63]. Der Ausgangspunkt der Rechnung ist die großkanonische Zustandssumme

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} z^{\sum_i n_i} e^{-\beta \sum_i n_i \varepsilon_i}, \quad (2.1)$$

wobei ε_i die Energie des i -ten Einteilchenzustands, n_i die Besetzung dieses Zustands, $z = e^{-\mu}$ die Fugazität, μ das chemische Potential und $\beta = 1/k_b T$ ist. Die Summe erstreckt sich über alle Sätze von Besetzungszahlen $\{n_i\}$. Im großkanonischen Ensemble unterliegt die Gesamtteilchenzahl keiner Einschränkung. Da es sich bei den betrachteten Teilchen um Bosonen handelt, dürfen sich in jedem Zustand beliebig viele Teilchen befinden. Dadurch kann die Summe über $\{n_i\}$ umgeschrieben werden in ein Produkt von unendlichen Summen über die Besetzung n_i der einzelnen Zustände. Diese Summen stellen geometrische Reihen dar, wodurch die Zustandssumme und damit die Gesamtteilchenzahl und die mittlere Besetzung eines Zustands ausgerechnet werden können.

$$\Xi = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} (z e^{-\beta \varepsilon_i})^{n_i} \right) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}} \quad (2.2)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log \Xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z e^{-\beta \varepsilon_i}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}} \quad (2.3)$$

$$\langle n_i \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \log \Xi = \frac{z e^{-\beta \varepsilon_i}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}} \equiv f(\varepsilon_i) \quad (2.4)$$

Die letzte Gleichung beschreibt die Bose-Verteilung der Teilchen auf die Energieniveaus. Im Vergleich zur Boltzmann-Verteilung, gegen die sie für $z \rightarrow 0$ geht, zeichnet sie sich durch eine verstärkte Besetzung der niedrigen Energieniveaus aus.

Nun soll die Gesamtteilchenzahl (Gleichung (2.3)) berechnet werden. Die dabei auftretende Summe über die Zustände i wird dazu umgeschrieben in eine Summe über die Energieniveaus ε_i , wobei $g(\varepsilon_i)$ die Entartung eines Energieniveaus bezeichnet. Diese Summe wird durch ein Integral angenähert, wobei $D(\varepsilon)$ die energetische Zustandsdichte bezeichnet

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} f(\varepsilon_i) = \sum_{\varepsilon_i} g(\varepsilon_i) f(\varepsilon_i) \simeq \int_0^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon + f(0). \quad (2.5)$$

Diese Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn der Abstand der Energieniveaus infinitesimal klein wird. Dies trifft für den hier betrachteten Fall eines Teilchens in einem homogenen Potential im thermodynamischen Limes zu, denn der Abstand der Energieniveaus eines Teilchens in einem Würfel der Kantenlänge L verschwindet mit $1/L^2$. Die Zustandsdichte beträgt in diesem Fall

$$D(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Der Grundzustand mit der Energie $\varepsilon = 0$ kommt im Integral somit nicht vor und muß in Gleichung (2.5) gesondert betrachtet werden. Da im thermodynamischen Limes die Gesamtteilchenzahl ihre Bedeutung verliert, muß mit der Dichte weitergerechnet werden. Sie kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{z e^{-\beta \varepsilon}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon}} + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \\ &= \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} = n_e + n_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ die thermische de Broglie Wellenlänge und $g_{3/2}(z)$ ein Einstein-Integral, auch Polylogarithmus genannt, ist. Der erste Term n_e dieser Summe ist die Dichte der Teilchen in den angeregten Zuständen, der zweite Term n_0 die Dichte der Teilchen im Grundzustand.

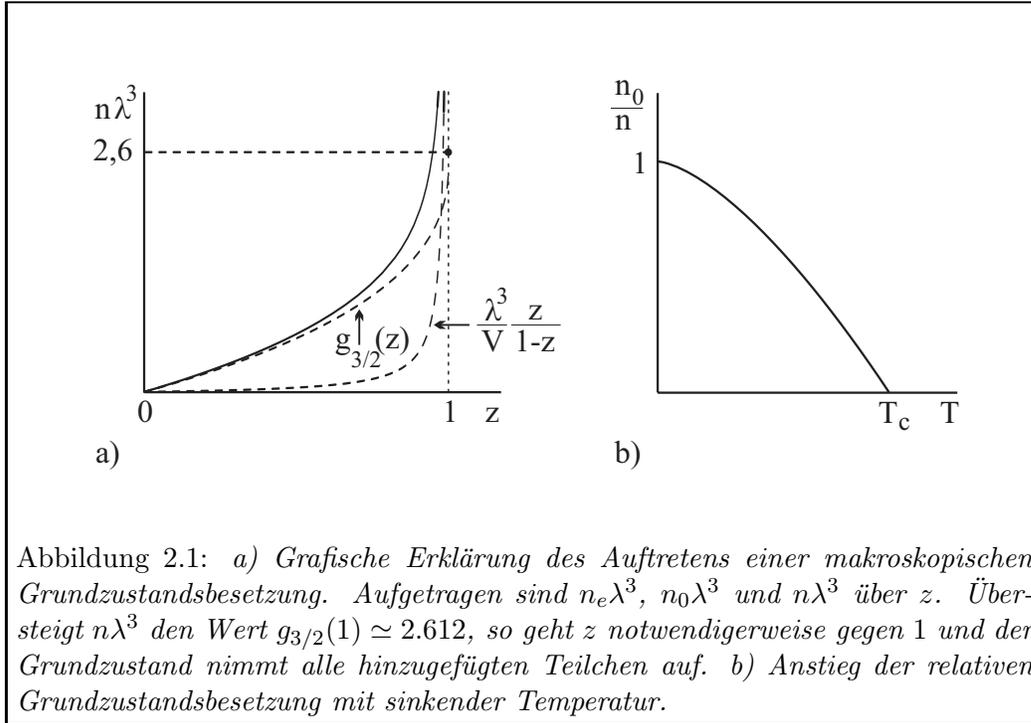
An der Definition der Fugazität läßt sich ablesen, daß diese immer größer null ist. Damit die Dichte im Grundzustand nicht negativ wird, muß nach Gleichung (2.7) $z \leq 1$ sein. In diesem Bereich ist $g_{3/2}(z)$ monoton steigend von $g_{3/2}(0) = 0$ auf $g_{3/2}(1) \approx 2,612$ (siehe Abbildung 2.1).

Dies bedeutet aber, daß die Dichte der Teilchen in den angeregten Zuständen, $n_e = g_{3/2}(z)/\lambda^3$, bei fester Temperatur nicht beliebig hoch werden kann. Die Dichte der Teilchen im Grundzustand kann für $z \rightarrow 1$ jedoch beliebig groß werden. Dies heißt, daß beim Überschreiten einer Dichte von $n \approx 2,612/\lambda^3$ alle weiteren Teilchen vom Grundzustand aufgenommen werden müssen. Dies führt zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustandes, der Bose-Einstein-Kondensation. Der Grundzustand entspricht dem Zustand mit dem Impuls $p = 0$. Also handelt es sich um eine Kondensation im Impulsraum und nicht um eine im Ortsraum.

Die Bedingung für das Auftreten der Bose-Einstein-Kondensation läßt sich umformen zu

$$n\lambda^3 \geq 2,612. \quad (2.8)$$

Das läßt sich folgendermaßen interpretieren: die Kondensation tritt auf, sobald die thermische de Broglie Wellenlänge in dieselbe Größenordnung kommt wie der mittlere Teilchenabstand. Dann verlieren die einzelnen Teilchen ihre Identität und verschmelzen zu einer Wellenfunktion. Die Größe $n\lambda^3$ ist gleich der Phasenraumdichte ausgedrückt in der Einheit $1/h^3$ (siehe (6.6)). Sie entspricht für $n\lambda^3 \ll 1$ der Besetzung des Grundzustands (siehe (2.59)). Aus der Bedingung (2.8) läßt sich



ablesen, daß für die Bose-Einstein-Kondensation hohe Dichten bei niedrigen Temperaturen vonnöten sind und leichte Teilchen früher kondensieren. Die kritische Temperatur für das Eintreten der Kondensation beträgt

$$k_B T_c = \frac{h^2}{2\pi m} \left(\frac{n}{2,612} \right)^{3/2}. \quad (2.9)$$

Unterhalb dieser Temperatur ist ein makroskopischer Anteil der Teilchen im Grundzustand, deswegen muß $z \simeq 1$ sein. Mit der Näherung $z = 1$ im Ausdruck für n_e läßt sich der Bruchteil der Teilchen im Grundzustand bei Temperaturen unterhalb von T_c berechnen

$$\frac{n_0}{n} = \frac{1 - n_e}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2.10)$$

Der Anteil der Teilchen im Grundzustand fängt bei T_c abrupt zu wachsen an (siehe Abbildung 2.1 b). Dies ist das Kennzeichen eines Phasenübergangs. Der Ordnungsparameter ist die relative Grundzustandsbesetzung. Bei $T = 0$ befinden sich alle Teilchen im Grundzustand, wie man es für jedes nichtfermionische System erwartet. Das Überraschende an der Bose-Einstein-Kondensation ist, daß der Grundzustand schon bei mittleren thermischen Energien makroskopisch besetzt wird, die größer sind als der Abstand des Grundzustands zum ersten angeregten Niveau.

2.1.2 Das ideale inhomogene Bose-Einstein-Kondensat

Bisher wurde die Bose-Einstein-Kondensation eines homogenen Gases betrachtet. Dies wird sich in Experimenten niemals realisieren lassen, dort findet die Kondensation in einem in einer Falle gefangenen Gas statt. Dadurch ergeben sich Änderungen im Verhalten des Bose-Einstein-Kondensats und im Ablauf der Kondensation. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Grundzustand ist nicht homogen, sondern besitzt am Potentialminimum ein Maximum. Selbst in einem Kastenpotential, das dem homogenen Fall am Nächsten kommt, besitzt die Grundzustandswellenfunktion ein Maximum in der Mitte des Kastens. Dadurch ergibt sich nicht nur eine Kondensation im Impulsraum, sondern auch im Ortsraum.

Um die Abweichungen im Kondensationsverhalten zu bestimmen, muß obige Rechnung mit einem Energieniveauspektrum durchgeführt werden, das einer Falle entspricht. Um möglichst allgemeine Aussagen treffen zu können, wird von [dG50], ein Energieniveauspektrum benutzt, das von einem Parameter α , genannt der spektrale Index, und der Dimension d abhängt. Für $\alpha = 1$ entspricht es dem Spektrum des d -dimensionalen harmonischen Oszillator und für $\alpha = 2$ dem Spektrum eines Teilchens in einem d -dimensionalen Kasten. α darf Werte zwischen diesen Extremfällen annehmen. Das Spektrum hat die Form

$$\varepsilon_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \Delta \sum_{i=1}^d a_i n_i^\alpha. \quad (2.11)$$

Die Zustände werden mit $\{n_1, n_2, \dots, n_d\}$ indiziert. Damit Δ den Abstand zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Niveau bezeichnet wird $\min\{a_i\} = 1$ gefordert. Das Verhalten der Bose-Einstein-Kondensation wird bestimmt durch das Verhältnis $q = d/\alpha$ zwischen der Dimension und dem spektralen Index und man erhält folgende Ergebnisse:

- Eine Bose-Einstein-Kondensation tritt nur für $q > 1$ auf. In drei Dimensionen ist dies sowohl für ein harmonisches als auch für ein Kastenpotential gegeben. Falls der Abstand der Energieniveaus in einer oder zwei Richtungen sehr viel größer ist als in den anderen Richtungen, kann man auch experimentell effektiv die Situation eines niedrigdimensionalen Gases schaffen. Aus der Bedingung sieht man, daß die Kondensation eines zweidimensionalen Gases in einem Kastenpotential nicht möglich ist. In einer Dimension erlaubt keines der hier behandelten Potentiale die Kondensation.
- Der Anstieg der relativen Grundzustandsbesetzung für $T < T_c$ ist gegeben durch $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^q$. Für den 3-dimensionalen harmonischen Oszillator ist $q = 3$, für den 3-dimensionalen Kasten ist $q = 3/2$. Also besitzt die Grundzustandsbesetzung im harmonischen Potential einen ausgeprägteren Anstieg.

2.1.3 Bose-Einstein-Kondensation endlicher Systeme

Die bisherigen Berechnungen waren nur im thermodynamischen Limes exakt. Das heißt, die Systeme waren unendlich ausgedehnt und bestanden aus unendlich vielen Teilchen. Dies kann jedoch niemals in Experimenten verwirklicht werden. Um Aussagen über endliche Systeme treffen zu können, muß die Rechnung aus Abschnitt 2.1.1 erweitert werden [Gro95], [Ket96a]. Die Erweiterung besteht darin, daß beim Übergang von der Summe über Energieniveaus zum Integral über die Energie (2.5), in der energetischen Zustandsdichte ein Korrekturfaktor mitgenommen wird, der die Diskretheit der Energieniveaus bei kleinen Energien besser berücksichtigt. Dadurch ist es nicht mehr notwendig, in den thermodynamischen Limes überzugehen, und man kann mit endlichen Teilchenzahlen rechnen. Die Rechnung wurde von [Gro95] für ein dreidimensionales harmonisches Potential durchgeführt. Als kritische Temperatur ergibt sich

$$T_c = T_0 \left(1 - \gamma \frac{\zeta(2)}{N} \left(\frac{k_b T_c}{\hbar \bar{\omega}} \right)^2 \right)^{1/3} \quad \text{mit} \quad (2.12)$$

$$T_0 = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_b} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad (2.13)$$

wobei $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ das geometrische Mittel der Oszillationsfrequenzen des harmonischen Oszillators in den drei Raumrichtungen ist. γ ist für einen isotropen harmonischen Oszillator $3/2$ und weicht für einen anisotropen nur leicht davon ab. ζ ist die Zetafunktion $\zeta(x) = g_x(1)$. Die relative Grundzustandsbesetzung ist gegeben durch

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 - \gamma \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)^{2/3}} \frac{1}{N^{1/3}} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2. \quad (2.14)$$

In Abbildung 2.2 wird die relative Besetzung des Grundzustands in Abhängigkeit von der Temperatur im thermodynamischen Limes und für 2000 Teilchen miteinander verglichen. Man erkennt, daß die kritische Temperatur im Fall endlicher Teilchenzahl gegenüber dem thermodynamischen Limes erniedrigt ist. Zudem verringert sich die Grundzustandsbesetzung bei einer gegebenen Temperatur. Der Verlauf der relativen Grundzustandsbesetzung besitzt bei T_c bei endlichen Teilchenzahlen keinen Knick mehr. Alle diese Effekte verschwinden mit zunehmender Teilchenzahl.

2.1.4 Bose-Einstein-Kondensation in verschiedenen Ensembles

Bisher wurde der Einfachheit halber im großkanonischen Ensemble gerechnet. Das bedeutet, daß angenommen wurde, daß das System mit einem Wärme- und einem Teilchenreservoir in Verbindung steht. In den Experimenten ist jedoch beides nicht der Fall. Das bedeutet, daß das kanonische und mehr noch das mikrokanonische Ensemble für die Beschreibung eines Bose-Einstein-Kondensats besser geeignet ist als

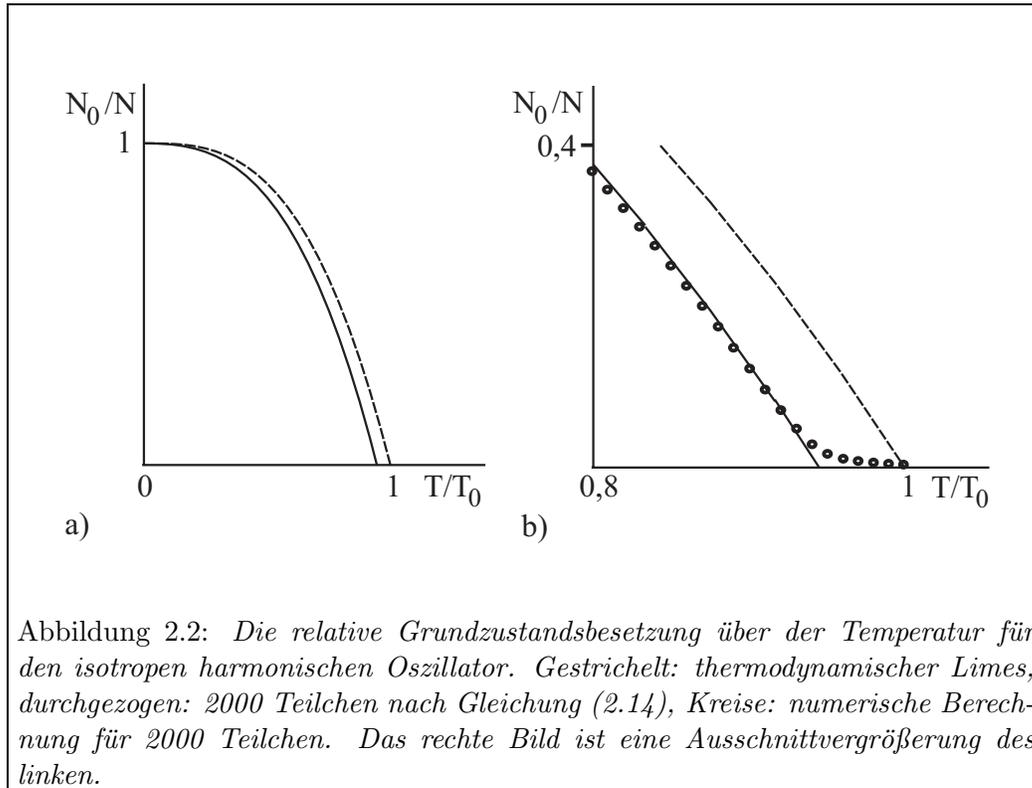
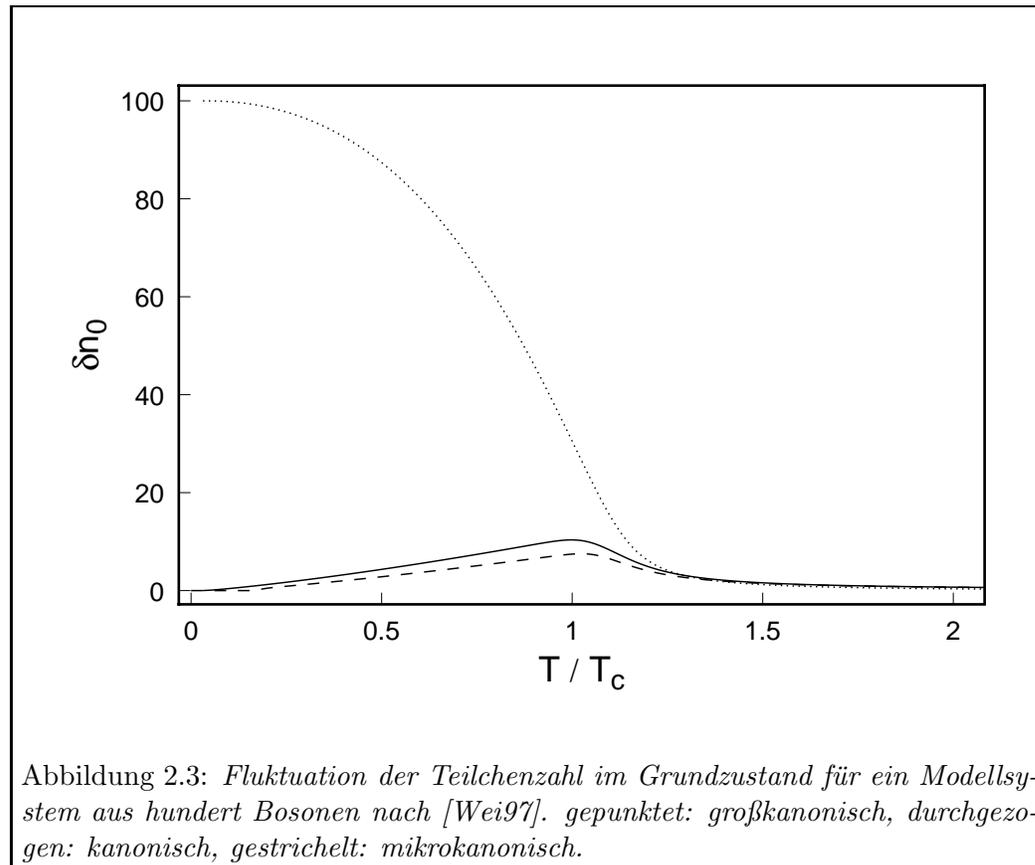


Abbildung 2.2: Die relative Grundzustandsbesetzung über der Temperatur für den isotropen harmonischen Oszillator. Gestrichelt: thermodynamischer Limes, durchgezogen: 2000 Teilchen nach Gleichung (2.14), Kreise: numerische Berechnung für 2000 Teilchen. Das rechte Bild ist eine Ausschnittvergrößerung des linken.

das großkanonische ¹. Für diese Ensembles ist die Berechnung der Zustandssumme, welche die Grundlage aller weiteren Rechnungen bildet, bis auf wenige Spezialfälle jedoch mit einigem Aufwand verbunden. In jedem Ensemble kann man die Zustandssumme mit Hilfe von Rekursionsformeln numerisch berechnen [Wei97]. Im mikrokanonischen Ensemble kann man sie mit zahlentheoretische Methoden analytisch bestimmen. Im Folgenden werden die Unterschiede in den Vorhersagen der verschiedenen Ensembles aufgezeigt, die mit diesen Rechenmethoden erzielt wurden.

Das großkanonischen Ensemble besitzt im Gegensatz zum kanonischen ein Teilchenreservoir. Falls Unterschiede bestehen, sollten sie sich also in Teilchenzahlverteilungen und Fluktuationen zeigen. In Abbildung 2.3 ist die Fluktuation der Teilchenzahl im Grundzustand für alle drei Ensembles gezeigt. Im großkanonischen Ensemble werden die Fluktuationen unterhalb der kritischen Temperatur sehr groß und sind bei $T = 0$ genauso groß wie die Teilchenzahl. Dies liegt daran, daß das Teilchenreservoir beliebig hohe Grundzustandsbesetzungen ermöglicht. Dies ist physikalisch sinnlos. Das großkanonische Ensemble verliert unterhalb T_c seine Gültigkeit. Im kanonischen Ensemble haben die Fluktuationen bei T_c ein Maximum. Dies ist ein Zeichen für einen Phasenübergang. Mit sinkender Temperatur nehmen

¹Vor kurzem wurde von *Navez et al.* [Nav97] ein viertes Ensemble eingeführt, bei dem der Grundzustand die Rolle eines Reservoirs für die angeregten Zustände übernimmt und das besonders gut zur Beschreibung von Kondensaten eingesetzt werden kann.



die Fluktuationen jedoch wieder ab. Bei $T = 0$ befinden sich alle Teilchen im Grundzustand. Da kein Teilchenreservoir vorhanden ist müssen die Fluktuationen verschwinden.

Das mikrokanonische Ensemble verhält sich, was die Teilchenzahlfluktuationen betrifft, wie das kanonische, da in beiden Fällen kein Teilchenzahlreservoir vorhanden ist. Das kanonische Ensemble besitzt im Gegensatz zum mikrokanonischen ein Energiereservoir. Trotzdem kommt es nicht zu unphysikalischen Fluktuationen der Energie, denn die relativen Fluktuationen verschwinden im thermodynamischen Limes: $\langle \Delta E \rangle / E \propto 1/\sqrt{N}$. Die beiden Ensembles sind nahezu äquivalent.

2.1.5 Bose-Einstein-Kondensation nichtidealer Gase

Bisher wurde immer davon ausgegangen, daß die Teilchen nicht miteinander wechselwirken. Dies ist in Wirklichkeit nicht der Fall. Bei einer hohen Grundzustandsbesetzung kann die Dichte so hohe Werte annehmen, daß die Streuung der Teilchen aneinander nicht mehr vernachlässigt werden kann. Die Wechselwirkung führt dazu, daß die Grundzustandswellenfunktion modifiziert wird. Dies wird durch die Gross-Pitaevskii Gleichung beschrieben, welche eine Schrödingergleichung für die

Wellenfunktion des Bose-Einstein-Kondensats ist. Hier soll diese Gleichung nur begründet werden, eine exakte Herleitung findet sich in [Fet71].

Die Gleichung ist nur gültig, falls die Temperatur des Bose-Einstein-Kondensats nahe $T = 0$ ist. Dann kann die Wechselwirkung der Bosonen untereinander als reine s-Wellen Streuung mit der Streulänge a beschrieben werden. Falls die Wechselwirkung eine kleine Korrektur zum Verhalten des idealen Gases ist, das heißt falls die Streulänge sehr viel kleiner ist als der mittlere Abstand zwischen zwei Teilchen, ist es möglich das Wechselwirkungspotential durch ein Pseudopotential der Form $g\delta(\vec{r})$ zu ersetzen, wobei $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ist [Hua63]. Die potentielle Energie, die ein Teilchen durch die Wechselwirkung mit allen anderen Teilchen erfährt, läßt sich ausdrücken durch ein mean-field Potential

$$V(\vec{r}) = \int d\vec{r}' n(\vec{r}') g\delta(\vec{r} - \vec{r}') = g n(\vec{r}) = gN |\Psi(\vec{r})|^2. \quad (2.15)$$

Dabei ist $n(\vec{r}) = N |\Psi(\vec{r})|^2$ die Dichte der Teilchen ausgedrückt durch die Wellenfunktion und die Teilchenzahl. Dieses Potential muß zusätzlich zum Fallenpotential in die Schrödinger Gleichung aufgenommen werden. Die Gleichung, die man so erhält, ist die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung

$$\mu\Psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) + gN |\Psi(\vec{r})|^2 \right] \Psi(\vec{r}). \quad (2.16)$$

Dabei ist μ das chemische Potential. Aus ihr läßt sich die Dichteverteilung der Teilchen im Grundzustand ableiten [Bay96]. Falls die mean-field Energie viel größer ist als die kinetische Energie, läßt sich der kinetische Energie-Term vernachlässigen. Dies bezeichnet man als Thomas-Fermi Näherung. Nun gelingt es, die Gleichung (2.16) nach $|\Psi|^2$ aufzulösen. Das Ergebnis ist

$$|\Psi|^2 = \frac{\mu - U(\vec{r})}{Ng} \quad (2.17)$$

falls $\mu > U(\vec{r})$ und $|\Psi|^2 = 0$ sonst. Die Dichteverteilung spiegelt also das Potential wieder. Dieses läßt sich, für die in den Experimenten benutzten Fallen, gut durch ein anisotropes, harmonisches Potential annähern

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m \sum_{j=1,2,3} \omega_j^2 r_j^2. \quad (2.18)$$

Das bedeutet, die Dichteverteilung im Grundzustand hat die Form einer umgekehrten Parabel und nicht mehr die einer Gaußverteilung, wie es ohne Wechselwirkung der Fall ist. Die maximale Breite der Wellenfunktion entlang der zu ω_i gehörenden Richtung beträgt

$$W_i = \sqrt{\frac{8\mu}{m\omega_i^2}}. \quad (2.19)$$

Das chemische Potential erhält man aus der Normierung der Wellenfunktion $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

$$\mu = \frac{1}{2}\hbar\bar{\omega} \left(15Na\sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5}, \quad (2.20)$$

wobei $\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$ das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen ist. Die Peak-Dichte des Kondensats kann aus Gleichung (2.17) abgelesen werden. Man erhält $n_0 = \mu/g$. Die mean-field Energie ist gegeben durch

$$E_{MF} = \frac{1}{2} \int d\vec{r} V(\vec{r})n(\vec{r}) = \frac{2}{7}N\mu, \quad (2.21)$$

wobei der Faktor 1/2 dafür sorgt, daß die Wechselwirkungsenergie jeden Teilchenpaares nur einmal berechnet wird.

2.1.6 Expansion eines Bose-Einstein-Kondensats

Die in dem hier vorgestellten Experiment erzeugten Bose-Einstein-Kondensate sind Kondensate eines atomaren Gases, das in einer magnetischen Falle gefangen ist. Die Kondensate werden zum Nachweis auf einen CCD-Chip abgebildet (siehe Beschreibung des experimentellen Aufbaus Kapitel 3). Da sie nur einige μm groß sind, stellt dies hohe Anforderungen an das Auflösungsvermögen des Abbildungssystems. Um die Bose-Einstein-Kondensate besser nachweisen zu können, kann man sie expandieren lassen, indem man die magnetische Falle ausschaltet. Beim Ausschalten der Falle wird die mean-field Energie freigesetzt und treibt das Kondensat auseinander. Die klassische Berechnung der Expansionsbewegung soll nun vorgestellt werden. Das Ergebnis ist dasselbe wie in quantenmechanischen Rechnungen [Cas96]. Der Ausgangspunkt der Rechnung ist die Kraft auf ein Teilchen eines klassischen Gases mit der auf N normierten Dichteverteilung $\rho_{cl}(\vec{r}, t)$ in einem Fallenpotential $U(\vec{r}, t)$, die sich aus dem Gradienten der gesamten potentiellen Energie ergibt

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla(U(\vec{r}, t) + g\rho_{cl}(\vec{r}, t)). \quad (2.22)$$

Solange die Falle noch eingeschaltet ist, befindet sich jedes Teilchen im Gleichgewicht, das heißt es gilt $\vec{F} = 0$, woraus

$$\nabla U(\vec{r}, t = 0) = -\nabla g\rho_{cl}(\vec{r}, t = 0) \quad (2.23)$$

folgt. Die Falle wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgeschaltet. Dadurch entfällt der Potentialterm $U(\vec{r})$ und durch die freiwerdende mean-field Energie erfahren die Teilchen eine Kraft $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\nabla g\rho_{cl}(\vec{r}, t)$.

Für Potentiale der Form (2.18) ist es möglich, die Expansion exakt zu berechnen. Dazu setzt man voraus, daß das Kondensat sich nur ausdehnt, ohne seine Parabelform zu verlieren. Jeder infinitesimal kleine Bereich der Wolke bewegt sich dann entlang einer Bahn

$$R_j(t) = \lambda_j(t)R_j(0) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.24)$$

Wobei die $\lambda_j(t)$ Skalierungsfaktoren sind, deren Bewegungsgleichung gesucht wird. Daraus erhält man für die Dichteverteilung

$$\rho_{cl}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} \rho_{cl} \left[\left\{ \frac{r_j}{\lambda_j(t)} \right\}_{j=1,2,3}, 0 \right], \quad (2.25)$$

wobei der Vorfaktor aus der Normierung kommt. Das Newtonsche Gesetz für die Bahn (2.24), $m\ddot{\vec{R}}_j(t) = F_j \left[\vec{R}(t), t \right]$, ergibt mit der Kraft (2.22)

$$m\ddot{\lambda}_j(t)R_j(0) = -(\partial_{r_j}U) \left[\vec{R}(t), t \right] + \frac{1}{\lambda_j\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\partial_{r_j}U) \left[\vec{R}(0), 0 \right], \quad (2.26)$$

wobei ρ_{cl} in (2.25) mit Hilfe von (2.23) ausgedrückt wurde. Setzt man das Potential des harmonischen Oszillators ein, so erkennt man, daß alle drei Terme proportional zu $R_j(0)$ sind, wodurch der Ansatz (2.24) gerechtfertigt wird. Das Kondensat behält während der Ausdehnung tatsächlich seine parabelförmige Dichteverteilung bei. Für die Skalierungsfaktoren folgen damit die Differentialgleichungen

$$\ddot{\lambda}_j = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j\lambda_1\lambda_2\lambda_3} - \omega_j^2(t)\lambda_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Die Anfangsbedingungen sind $\lambda_j(0) = 1$ und da die Teilchen sich Anfangs in Ruhe befinden $\dot{\lambda}_j(0) = 0$. Diese klassische Rechnung kann zu einer quantenmechanischen erweitert werden, das Ergebnis bleibt dasselbe [Cas96]. Für komplizierte zeitliche Verläufe der Fallenfrequenzen läßt sich dieses Differentialgleichungssystem nur numerisch lösen.

Für den Fall des instantanen vollständigen Abschaltens der Falle, das heißt $\omega_j(t > 0) = 0$, lassen sie sich näherungsweise analytisch lösen. Dazu werden die Gleichungen zunächst etwas vereinfacht, da in den Experimenten die Oszillationsfrequenzen in zwei Richtungen gleich sind ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_\perp$, $\omega_3 = \omega_\parallel$). Für die beiden Skalierungsfaktoren ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}\lambda_\perp &= \frac{1}{\lambda_\perp^3\lambda_\parallel}, \\ \frac{d^2}{d\tau^2}\lambda_\parallel &= \frac{\epsilon}{\lambda_\perp^2\lambda_\parallel^2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei λ_\perp für $\lambda_1 = \lambda_2$ und λ_\parallel für λ_3 steht. Es wurde eine dimensionslose Zeitvariable $\tau = \omega_\perp(0)t$ und ein Parameter $\epsilon = \omega_\parallel(0)/\omega_\perp(0)$ eingeführt, der experimentell eingestellt werden kann und als klein angenommen wird. Die Differentialgleichungen (2.28) können näherungsweise gelöst werden, indem man eine Entwicklung von λ_\perp und λ_\parallel in ϵ verwendet. In nullter Ordnung ergibt sich $\lambda_\parallel = 1$ und

$$\lambda_\perp(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2}. \quad (2.29)$$

In zweiter Ordnung ist die axiale Ausdehnung gegeben durch

$$\lambda_\parallel(\tau) = 1 + \epsilon^2 \left[\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right]. \quad (2.30)$$

Dies bedeutet, je enger der Einschluß des Kondensats in einer Richtung ist, desto schneller expandiert es in dieser Richtung nach dem Abschalten der Falle.

Eine interessante Größe ist das Verhältnis zwischen der axialen und der radialen Ausdehnung, die unter Verwendung von (2.19) gegeben ist durch

$$A(\tau) = \frac{W_{\parallel}(\tau)}{W_{\perp}(\tau)} = \frac{\lambda_{\parallel}(\tau)}{\lambda_{\perp}(\tau)} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.31)$$

Diese Größe hängt nur noch vom Verhältnis der Schwingungsfrequenzen und der Ausdehnungszeit ab und wird somit nicht von Fluktuationen in der Teilchenzahl von Versuch zu Versuch beeinflusst. Nachdem die gesamte mean-field Energie aufgebraucht ist, werden die Teilchen nicht weiter beschleunigt und das Verhältnis geht gegen die Konstante $\pi/2\varepsilon$.

2.1.7 Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats

Das oben besprochene Expansionsverhalten ermöglicht den einfachen Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats. Hat man in einer Falle eine Atomwolke gekühlt, so gilt es zu entscheiden, ob dabei ein Kondensat entstanden ist oder ob es sich nur um ein sehr kaltes Gas handelt. Angenommen in der Falle befände sich nur ein Gas der Temperatur T . Die Anfangsverteilung dieses Gases im Einteilchen-Phasenraum ist gegeben durch eine Boltzmann-Verteilung

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 r_i^2 \right) \right), \quad (2.32)$$

wobei $1/Z$ der Normierungsfaktor ist. Sobald die Falle ausgeschaltet wird, entwickelt sich diese Verteilung nach der Boltzmann-Gleichung (siehe 2.43)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} f. \quad (2.33)$$

Diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung (2.32) wird durch

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 \left(r_i - \frac{p_i t}{m} \right)^2 \right) \right) \quad (2.34)$$

gelöst. Die Verteilung im Ortsraum erhält man, indem man über die Impulse abintegriert

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\omega_i^2 x_i^2}{1 + t^2 \omega_i^2} \right). \quad (2.35)$$

Für große Zeiten hängt diese Verteilung nicht mehr von den Schwingungsfrequenzen ω_i ab. Die Wolke nimmt eine isotrope Gaußverteilung an, deren volle Halbwertsbreite von der Temperatur und der Fallzeit abhängt

$$\Delta x_{iFWHM}(t) = \sqrt{8 \ln 2} \sqrt{k_B T \left(\frac{1}{m \omega_i^2} + \frac{t^2}{m} \right)}. \quad (2.36)$$

Aus der Breite läßt sich die Temperatur bestimmen.

Dieses Expansionsverhalten steht in starkem Kontrast zum Verhalten eines Bose-Einstein-Kondensats, bei dem die Verteilung anisotrop ist. Durch Messung der Dichteverteilung und deren zeitlicher Änderung läßt sich testen ob ein Kondensat vorliegt. Allerdings ist die Bose-Einstein-Kondensation nicht der einzige Vorgang, der zu anisotropen Dichteverteilungen führen kann. Ein hydrodynamisch dichtes Gas [vLvdH96] oder stehende verstimmte Lichtwellen, von denen die kältesten Atome während der Expansion geleitet werden, können dies ebenfalls hervorrufen. Um zu entscheiden ob wirklich ein Kondensat vorliegt müssen noch weitere Untersuchungen angestellt werden. Bei endlichen Temperaturen wird immer sowohl ein Bose-Einstein-Kondensat als auch eine thermische Wolke vorhanden sein. Man erhält dadurch Dichteverteilungen, die sowohl einen isotropen, als auch einen anisotropen Anteil besitzen.

2.2 Theorie der Verdampfungskühlung

Um die Bose-Einstein-Kondensation in einem atomaren Gas zu erreichen muß man dieses stark abkühlen und gleichzeitig hohe Dichten erzeugen. Der einzige erfolgreiche Weg dies in ausreichendem Maße zu erreichen ist zur Zeit die Verdampfungskühlung in magnetischen Fallen [Hes85], [Hes86]. In diesem Abschnitt wird dieses Kühlverfahren ausführlich vorgestellt [Ket96b]. Zunächst erfolgt eine allgemeine Einführung, anschließend wird auf die theoretische Beschreibung eingegangen und eine Simulation vorgestellt. Abschließend wird behandelt, wie man den Kühlvorgang optimiert.

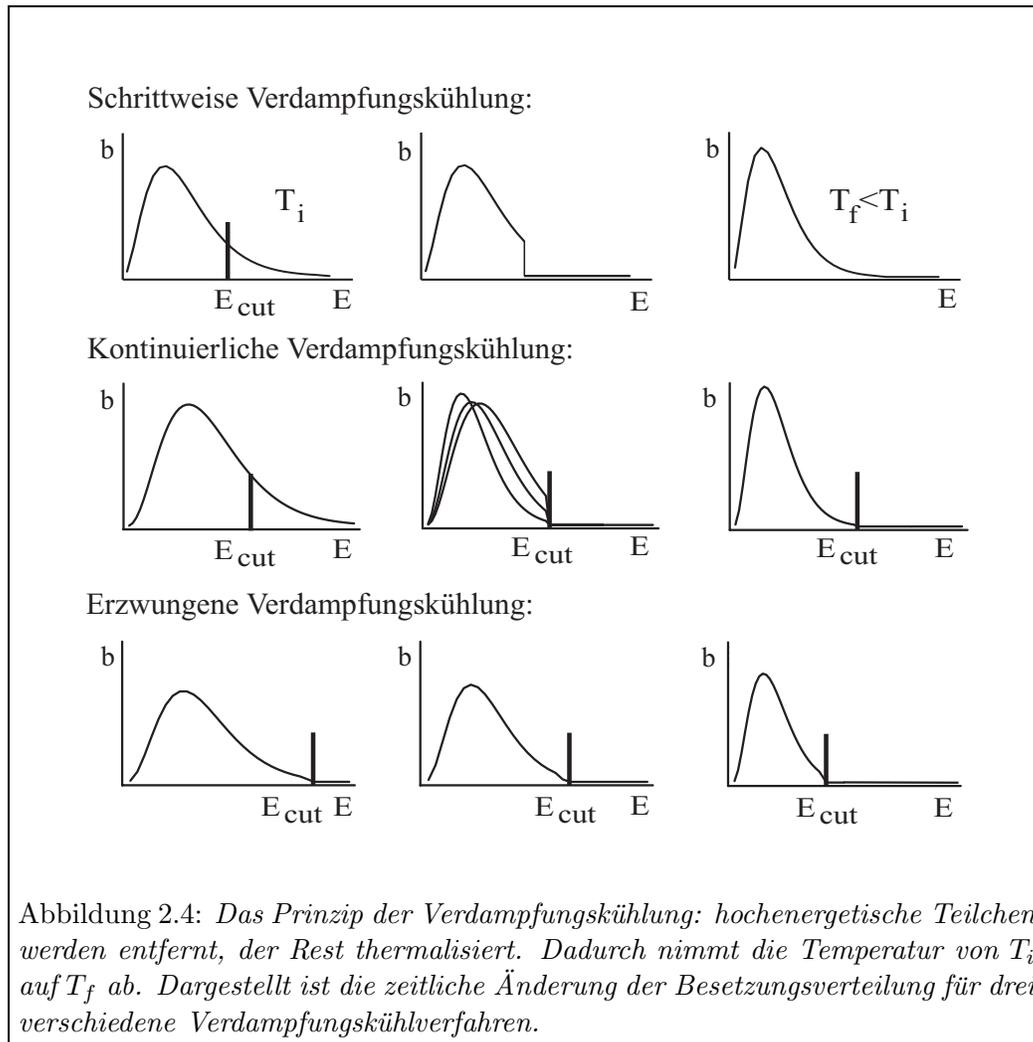
2.2.1 Prinzip der Verdampfungskühlung

Verdampfungskühlung ist ein Prozeß der in vielen physikalischen Systemen abläuft. Beispiele dafür gehen vom mikroskopisch Kleinen, wie Neutronen, die aus einem angeregten Atomkern verdampfen [Nol88], über alltägliche Phänomene, wie einer sich abkühlenden Tasse dampfenden Tees, bis zu kosmischen Prozessen, wie Sternen, die aus dem Gravitationspotential eines Kugelsternhaufens verdampfen [Jr.87]. Das System, das im Experiment realisiert wird, ist eine Wolke von Rubidiumatomen, die in einer magnetischen Falle gefangen ist.

Um das Funktionsprinzip zu verstehen, betrachtet man die energetische Besetzungsverteilung der Teilchen bei einer Anfangstemperatur T_i (siehe Abbildung 2.4 (Schrittweise Verdampfungskühlung)). Für ein freies Gas ist dies die Maxwell-Verteilung. Nun werden plötzlich alle Teilchen, deren Energie einen gewissen Betrag (die Abschneideenergie E_{cut}) überschreitet, aus der Wolke entfernt. Die Verteilung, die sich daraus ergibt, ist nicht mehr im thermischen Gleichgewicht. Durch elastische Stöße der Teilchen untereinander stellt sich dieses aber wieder ein. Da der Wolke hochenergetische Teilchen entzogen worden sind, ist die sich nun einstellende Temperatur T_f kleiner als die Ausgangstemperatur [Dav95b].

Nun soll dieser Prozeß kontinuierlich ablaufen, das heißt es werden ständig alle Teilchen, die mehr Energie als die Abschneideenergie besitzen, aus der Wolke entfernt (Abbildung 2.4 (Kontinuierliche Verdampfungskühlung)). Durch elastische Stöße bekommen immer wieder neue Teilchen die notwendige Energie. Die Wolke wird kälter, aber dadurch entstehen seltener hochenergetische Teilchen, und die Verdampfungskühlung läuft immer langsamer ab.

Dem kann durch Absenken der Abschneideenergie abgeholfen werden. Dies wird als erzwungene Verdampfungskühlung bezeichnet (Abbildung 2.4 (Erzwungene Verdampfungskühlung)). Um ein gutes Kühlergebnis zu erzielen, ist es wesentlich, den zeitlichen Verlauf der Abschneideenergie zu optimieren. Ein einfacher erster Ansatz ist, die Abschneideenergie proportional zur Temperatur abzusenken, $E_{cut} = \eta k_B T$, wobei η ein konstanter Abschneideparameter ist. Ist η groß, so wird pro Teilchen



sehr viel Energie abgeführt, aber der Kühlvorgang dauert lange, so daß andere Teilchenverluste, die es immer gibt, stark zu Buche schlagen (siehe Abschnitt 2.2.3). Ist η klein, geht alles schneller, aber es wird verschwenderisch mit den Teilchen umgegangen, und möglicherweise kann die erforderliche Dichte für die Kondensation nicht mehr erreicht werden.

Die Zeitskala, auf der das Verdampfungskühlen abläuft, ist gegeben durch die Dauer der Thermalisierung. Diese hängt von der elastischen Stoßrate

$$\gamma_{el} = \sqrt{2}\sigma \langle v \rangle \langle n^2 \rangle / N \quad (2.37)$$

ab. Dabei ist $\langle n^2 \rangle / N$ die mit der Dichte gewichtete gemittelte Dichte, $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit und σ der Streuquerschnitt der Teilchen (siehe Abschnitt 6.1). Da ständig Teilchen durch Verlustprozesse verloren gehen, ohne zum Kühlen beizutragen, sollte die Zeitskala der Verdampfungskühlung kurz gehalten werden. Um die elastische Stoßrate zu erhöhen, sollte eine Atomsorte mit einem hohen elastischen Streuquerschnitt bei niedrigen Temperaturen gewählt werden. Deswei-

teren muß ein möglichst steiles Fallenpotential und eine hohe Anfangsteilchenzahl verwendet werden, um die Dichte zu erhöhen.

Die Stoßrate ist temperaturabhängig und verändert sich somit im Verlauf des Kühlvorgangs. Sie nimmt durch die mit der Temperatur wie \sqrt{T} sinkende mittlere Geschwindigkeit der Teilchen ab. Da ständig Atome verdampfen, nimmt die Dichte und damit ebenfalls die Stoßrate ab. Falls das Potential eine geeignete Form hat, kann sich die Dichte bei sinkender Temperatur so stark erhöhen, daß die beiden die Stoßrate erniedrigenden Effekte überkompensiert werden und sich die elastische Stoßrate erhöht. Dadurch wird die Verdampfungskühlung ein sich selbst beschleunigender Prozeß, auch "galoppierende" oder "run-away" Verdampfungskühlung genannt. Die dazu nötige Potentialform soll nun abgeschätzt werden. In einem Potential der Form $U(r) \propto r^{3/\delta}$ ist die Dichte $\langle n^2 \rangle / N$ proportional zu $NT^{-\delta}$, die Stoßrate also proportional zu $NT^{1/2-\delta}$. Allein um den Stoßratenverlust durch die sinkende Geschwindigkeit auszugleichen muß δ also größer $1/2$ sein. Wegen der Teilchenverluste ist ein deutlich größeres δ nötig, je größer desto besser. Realistische Werte liegen im Bereich zwischen einem harmonischen Potential $\delta = 3/2$ und einem linearen $\delta = 3$. Befindet man sich im Bereich der "run-away" Verdampfungskühlung, so erhöht sich die Dichte während die Temperatur sinkt. Beide Effekte erhöhen die Peak-Phasenraumdichte, denn diese ist proportional zu $nT^{-3/2}$. Man befindet sich auf der Zielgeraden zur Bose-Einstein-Kondensation.

2.2.2 Verdampfungskühlung in einer magnetischen Falle

Funktionsprinzip der magnetischen Falle

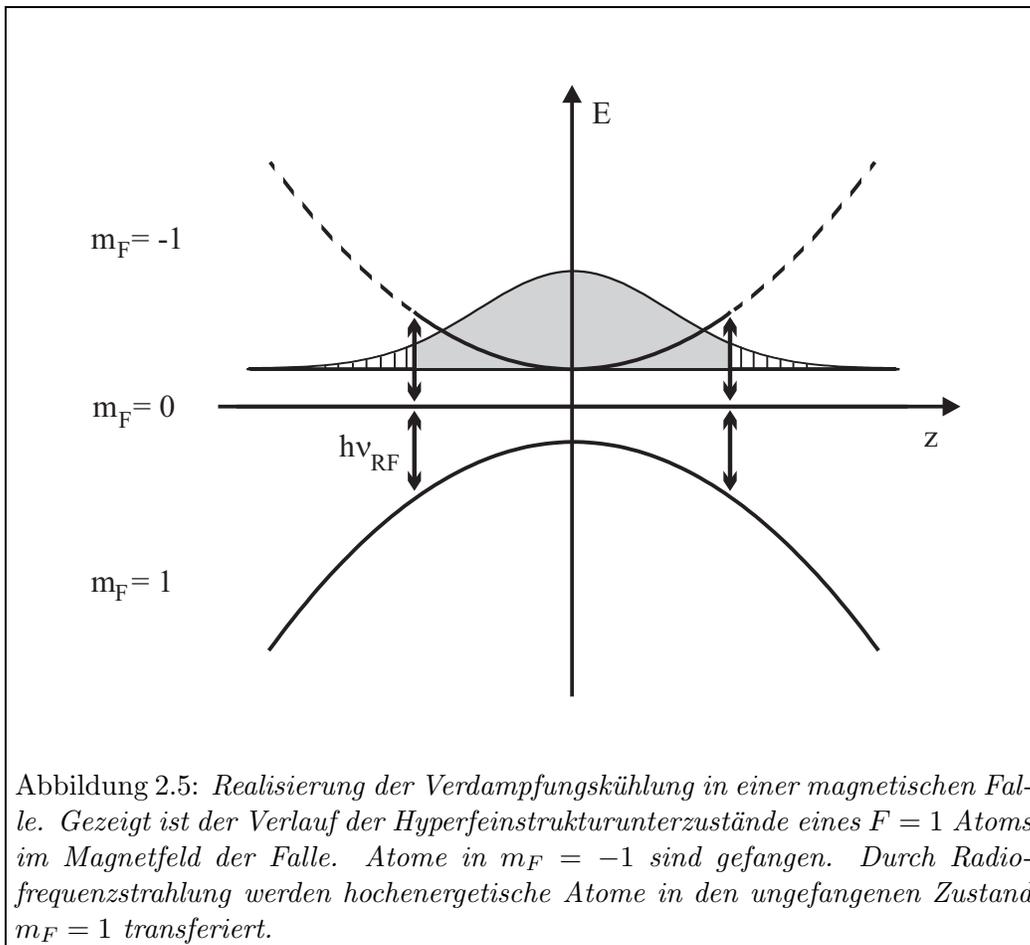
Wie verwirklicht man das oben diskutierte Prinzip in dem hier vorgestellten Experiment? Der Ausgangspunkt ist eine in einer magnetischen Falle gespeicherte Wolke von Rubidiumatomen (siehe Kapitel 3). Die magnetische Falle beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments der Atome mit einem Magnetfeld, das ein Minimum besitzt. Das Magnetfeld bewirkt durch den Zeeman-Effekt eine Verschiebung der Hyperfeinstrukturzustandsenergie gemäß

$$U(\vec{r}) = \mu_B g_F m_F |B(\vec{r})|. \quad (2.38)$$

Dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton, g_F der g -Faktor und m_F gibt den magnetischen Unterzustand des Hyperfeinstrukturzustands an. Atome in Hyperfeinstrukturunterzuständen, deren Energie durch das Magnetfeld angehoben wird, werden im Magnetfeldminimum gefangen, die anderen aus dem Feld herausgetrieben. Ein Zustand mit $m_F = 0$ wird vom Magnetfeld nicht beeinflusst. Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 2.5 den Verlauf der Hyperfeinstrukturunterniveaus eines $F = 1$ Atoms in einer harmonischen magnetischen Falle.

Die bisherige Beschreibung der Funktionsweise der magnetischen Falle ist nur gültig, solange der Hyperfeinstrukturunterzustand eines Atoms erhalten bleibt. Dazu

ist es notwendig, daß das magnetische Moment adiabatisch der Richtung des Magnetfeldes folgt, die sich durch die Bewegung des Atoms am Ort des Atoms ändert. Ansonsten können die m_F -Zustände mischen, es treten Majorana-Übergänge auf. Die magnetischen Momente können adiabatisch folgen, solange ihre Präzessionsfrequenz um das Magnetfeld, die Larmor-Frequenz, größer als die Änderungsgeschwindigkeit der Richtung des Magnetfeldes im Bezugssystem des Atoms ist [Pet95]. Diese Bedingung wird am ehesten im Zentrum der Falle verletzt, denn dort ist die Geschwindigkeit der Atome am größten und durch das geringe Magnetfeld die Larmorfrequenz klein. Deswegen muß darauf geachtet werden, daß im Zentrum der Falle immer noch ein ausreichend hohes Magnetfeld herrscht.



Radiofrequenzinduzierte Verdampfungskühlung

Nun muß eine Methode gefunden werden, energiereiche Teilchen aus einer magnetischen Falle zu entfernen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann den Potentialwall, den das Magnetfeld bildet, gezielt absenken, so daß die ener-

giereichsten Atome hinauslecken können [Hes86]. Oder man nutzt aus, daß sich nur die energiereichsten Teilchen in den äußeren Bereichen der Wolke aufhalten können. Dort kann man sie durch eine absorbierende Wand entfernen [Hes87]. Zu diesem Zweck kann ebenfalls ein Laserstrahl benutzt werden, der die Atome in ein nichtgefangenes Niveau umpumpt [Set93]. Die Erfolgreichste und auch in dem hier vorgestellten Experiment benutzte Methode nutzt aus, daß die Teilchen hoher potentieller Energie eine große Zeeman-Verschiebung erfahren. Mit Radiofrequenzstrahlung kann man durch Spinresonanz Übergänge zwischen den Zeeman-Niveaus induzieren und die Atome so von gefangenen in nichtgefangene Zustände transferieren [Pri89]. Da die Auswahlregel $\Delta m_F = 1$ für diese Übergänge gilt, wird eine Radiofrequenz ν von

$$h\nu = \mu_B g_F |B(\vec{r})| = U(\vec{r})/m_F \quad (2.39)$$

benötigt, um Atome mit einer Energie größer als $U(\vec{r})$ aus der Falle zu entfernen. Dabei ist darauf zu achten, daß nur die magnetische Komponente der Radiofrequenz-Strahlung senkrecht zur Richtung des Fallenmagnetfeldes die Übergänge treibt.

Gravitation und Dimensionalität der Verdampfungskühlung

Die Atome werden auf der Fläche gleicher Zeeman-Aufspaltung

$$h\nu = \mu_B g_F |B(\vec{r})|, \quad (2.40)$$

welche die Wolke umgibt, verdampft. Vernachlässigt man die Gravitation, ist dies eine Äquipotentialfläche. Die Dichte der Atome ist überall auf dieser Fläche gleich groß, weshalb Atome auf der ganzen Fläche verdampft werden. Man spricht von dreidimensionalem Kühlen, da alle drei Geschwindigkeitskomponenten gleichermaßen gekühlt werden. Die Gravitation zieht die Wolke jedoch nach unten. Die Atome am unteren Rand erfahren eine stärkere Zeeman-Aufspaltung als die am oberen. Dadurch verdampfen die Atome am unteren Rand zuerst. Falls die Verschiebung groß genug ist, verdampfen nur noch Atome am unteren Ende der Wolke. Die Verdampfungskühlung ist eindimensional geworden, da die Atome nur noch in vertikaler Richtung gekühlt werden. Dies muß im Experiment vermieden werden und macht eine Mindeststeilheit des vertikalen Einschlusses erforderlich.

2.2.3 Verlust- und Heizprozesse

Durch Verluste von Teilchen aufgrund anderer Prozesse als der Verdampfung wird die Kühlung stark beeinträchtigt [GO]. Solche Verluste führen nicht zum Sinken der Temperatur, da sie wahllos Teilchen jeder Energie treffen. Im Gegenteil, oft sind sie verbunden mit Heizprozessen. Sind sie zu stark, führt die beständige Abnahme der Dichte und damit der elastischen Stoßrate zum Erliegen des Verdampfungskühlvorgangs. Wenn es keine Verluste gäbe, könnte man die Abschneideenergie beliebig

langsam absenken und dadurch nur extrem energiereiche Teilchen verdampfen lassen, was eine sehr hohe Endteilchenzahl garantieren würde. Die Verlustrate gibt die Größenordnung der zeitlichen Dauer vor, welche die Verdampfungskühlung einnehmen darf. Verluste gibt es durch sehr unterschiedliche Ursachen, die mehr oder weniger gut experimentell zu steuern sind.

Verluste durch Hintergrundgasstöße

Atome im Restgas, daß sich in der Vakuumkammer befindet, haben eine Energie die viel größer ist, als die typischerweise einige mK Tiefe der magnetischen Falle. Stoßen sie mit Atomen in der Falle, so werden diese aufgeheizt und meist aus der Falle herauskatapultiert. Deswegen versucht man unter möglichst guten Vakuumbedingungen zu arbeiten. Dieser Verlustmechanismus ist zu Beginn der Verdampfungskühlung der wichtigste.

Verluste durch zwei-Körper Stöße

Da die Atome in einem Magnetfeldminimum gespeichert werden, müssen sie sich notwendigerweise in einem Hyperfeinstrukturunterzustand befinden, der nicht der Grundzustand ist. Durch Stöße können sie in einen niedrigeren Hyperfeinstrukturunterzustand wechseln. Dabei gibt es zwei verschiedene Mechanismen. Spin Relaxationsstöße bestehen darin, daß Drehimpuls zwischen Kern und Hülle ausgetauscht wird. Dieser Mechanismus ist allerdings durch die Drehimpulserhaltung für Atome verboten, bei denen sowohl Hülle, als auch Kern maximal polarisiert sind, wie es bei den in dem hier vorgestellten Experiment verwendeten $F = 2$, $m_F = 2$ ^{87}Rb Atomen der Fall ist. In dipolaren Stößen wird Bahn-Drehimpuls, aus der Bewegung der Stoßpartner gegeneinander, und Spin-Drehimpuls ausgetauscht. Dadurch können die Atome in ein nichtgefangenes Niveau gebracht werden, wodurch sie die Falle verlassen. Die Wahrscheinlichkeit für solche Stöße nimmt mit steigender Dichte zu. Deswegen verliert man durch sie besonders Atome, die sich in der Fallmitte aufhalten, wo die Dichte hoch ist. Diese Atome sind im Mittel kalt. Also heizt der Prozeß die Wolke auf. Er wird deshalb auch als "Verdampfungsheizen" bezeichnet. Durch die im Verlauf der Verdampfungskühlung steigende Dichte nehmen die Verluste durch dipolare Stöße zu und können die Verluste durch Hintergrundgasstöße übersteigen.

Falls ein Atom zwar das Hyperfeinstrukturunterniveau wechselt, aber in einem gefangenen Zustand endet, wird die Zeeman-Energie

$$\Delta E = \mu_B g_F \Delta m_F |B(\vec{r})| \quad (2.41)$$

freigesetzt, wobei das Magnetfeld am Ort des Stoßes zu verwenden ist. Sie verteilt sich als Bewegungsenergie auf die beiden Stoßpartner und beträgt im Zentrum der Falle, in dem hier beschriebenen Experiment etwa $k_B \cdot 100 \mu K$. Dies ist nicht genug

um die Falle zu verlassen, aber die Atome werden auf weiten Bahnen durch die Falle pendeln und dabei immer wieder die kalte Atomwolke durchdringen, mit den Atomen stoßen und diese dadurch heizen. Dies schadet besonders, nachdem schon ein Bose-Einstein-Kondensat erzeugt worden ist. Um solche energiereichen Atome sofort zu entfernen, läßt man die Radiofrequenzstrahlung auch nach Abschluß der Verdampfungskühlung an.

Verluste durch drei Körper Stöße

Bilden zwei Rubidium Atome ein Molekül, so wird dessen Bindungsenergie frei. In zwei-Körper Stößen ist dies durch die Impulserhaltung nicht möglich, es muß noch ein drittes Atom hinzukommen. Sowohl das Molekül, als auch der dritte Partner verlassen die Falle. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich drei Atome gleichzeitig in einem Volumen von der Kantenlänge der elastischen Streulänge befinden, ist erst bei sehr hohen Dichten groß, so daß dieser Verlustmechanismus erst am Ende der Verdampfungskühlung eine Rolle zu spielen beginnt. Sollten diese Verluste zu stark werden, kann man die Falle etwas öffnen um die Dichte zu reduzieren.

Verluste durch Absorption von Licht

Wird ein Atom durch resonantes Licht angeregt, ist die Wahrscheinlichkeit groß, daß es bei der Emission eines Photons in einen nichtgefangenen Zustand übergeht. Das Atom wird durch das Magnetfeld aus der Wolke getrieben. Im Experiment werden nahresonante Laser benutzt (siehe Kapitel 3.2). Während der Verdampfungskühlung muß man die Atomwolke vor Licht aus diesen Lasern schützen. Normales Tageslicht enthält nur wenige nahresonante Photonen, so daß es nicht zu Teilchenverlusten führt.

Heizen durch unstabiles Potential

Die gefangenen Atome können durch ein vibrierendes Potential geheizt werden. Insbesondere kann dies durch Vibrationen mit den Eigenfrequenzen des Potentials oder deren Harmonischen geschehen. Deswegen ist es wichtig Fluktuationen der Magnetfelder zu verhindern und für einen mechanisch stabilen Aufbau zu sorgen.

2.2.4 Simulation der Verdampfungskühlung

Um den Prozeß des Verdampfungskühlens besser zu verstehen, kann man ihn simulieren. Mit der Simulation kann man abschätzen ob mit den technischen Daten des Experiments Bose-Einstein-Kondensation erreicht werden kann. Desweiteren ist es möglich den Verlauf der Radiofrequenz zu optimieren und Optimierungsstrategien

zu testen. Schließlich dient sie zum Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit der Theorie.

Es gibt mehrere verschiedene Ansätze für eine Simulation. Die erste Gruppe von Simulationen benützt Monte-Carlo Rechnungen, bei denen die Trajektorien und Stöße der Teilchen möglichst detailgetreu nachgebildet werden. Da jeder heutige Computer von $N = 10^8$ stoßenden Teilchen überfordert ist, müssen einige Vereinfachungen durchgeführt werden. Die erste besteht darin, nicht jedes der N^2 Teilchenpaare nach jedem Zeitschritt auf eine mögliche Kollision zu überprüfen, sondern stellvertretend dafür in jeder Region des Raumes zufällig Teilchenpaare auszuwählen, die dann per Definition stoßen [Bir76]. Die zweite Vereinfachung besteht darin, nicht jedes Teilchen zu verfolgen, sondern immer nur eine konstante, kleine Zahl (in der Größenordnung 10^3) von Pseudo-Teilchen zu verfolgen, deren jedes eine entsprechende Menge der echten Teilchen repräsentiert [GO]. Sinkt im Verlauf der Verdampfungskühlung die Teilchenzahl, ändert man ab und zu die Menge der Teilchen, die ein Pseudo-Teilchen repräsentiert, so daß die Rechengenauigkeit konstant bleibt.

Weitere Verfahren beruhen auf der Boltzmann-Gleichung. Zwei dieser Verfahren wurden für die vorliegende Arbeit benutzt. Eine davon wird im Folgenden ausführlich vorgestellt, die zweite nur kurz erläutert (siehe auch [Sno88], [Lui95]).

Die Boltzmann-Gleichung

Die hier vorgestellte Simulationsmethode beruht auf dem numerischen Lösen der Boltzmann-Gleichung. Diese Gleichung ist die Bewegungsgleichung der Phasenraumverteilungsfunktion. Sie wird im Folgenden nicht hergeleitet (siehe [Hua63]), sondern nur begründet. Die Phasenraumverteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ ist definiert als die Anzahl der Teilchen in einem Volumen $1/h^3$ des Einteilchen-Phasenraums um (\vec{r}, \vec{p}) zur Zeit t . Sie ist normiert auf die Anzahl der Teilchen durch

$$N = \frac{1}{h^3} \int d^3r d^3p f(\vec{r}, \vec{p}, t). \quad (2.42)$$

Die Teilchen bewegen sich, werden durch Kräfte beschleunigt und stoßen miteinander. Diese Prozesse können zu einer sich zeitlich verändernden Phasenraumverteilung führen. Die zugehörige Bewegungsgleichung ist die Boltzmann-Gleichung.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(-\frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{Stöße}} f(\vec{r}, \vec{p}, t). \quad (2.43)$$

Um die Gleichung zu verstehen, betrachtet man die Änderung der Phasenraumdicke in einem kleinen Ausschnitt des Phasenraums um den Ort (\vec{r}, \vec{p}) (siehe Abbildung 2.6). Der erste Term $-m^{-1} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f$ kommt von der Bewegung der Teilchen. Sie verwandelt eine örtliche Änderung der Phasenraumdicke in eine zeitliche. Der zweite Term $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f$ beschreibt die Phasenraumdickeänderung aufgrund einer Beschleunigung der Teilchen, zum Beispiel durch ein Potential. Der letzte Term ist

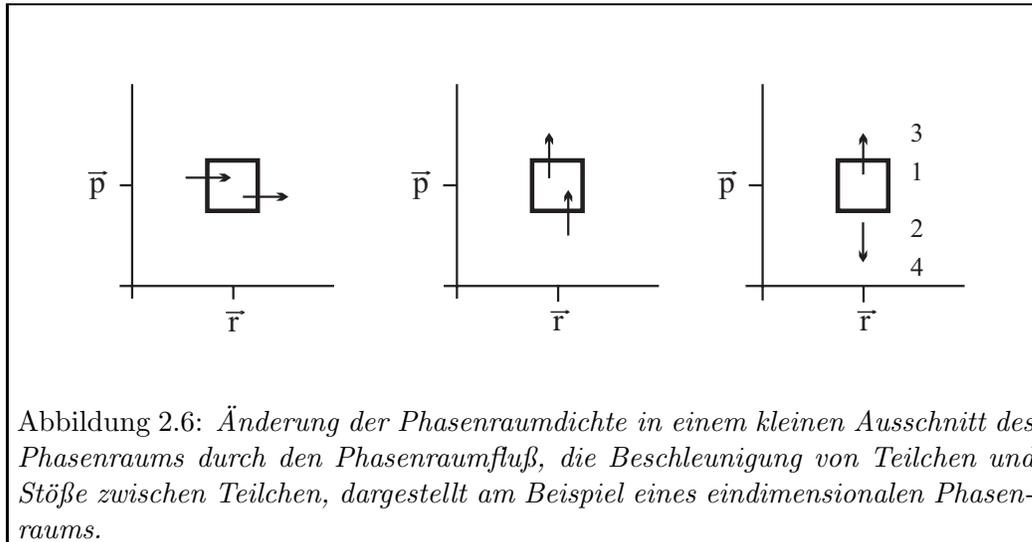
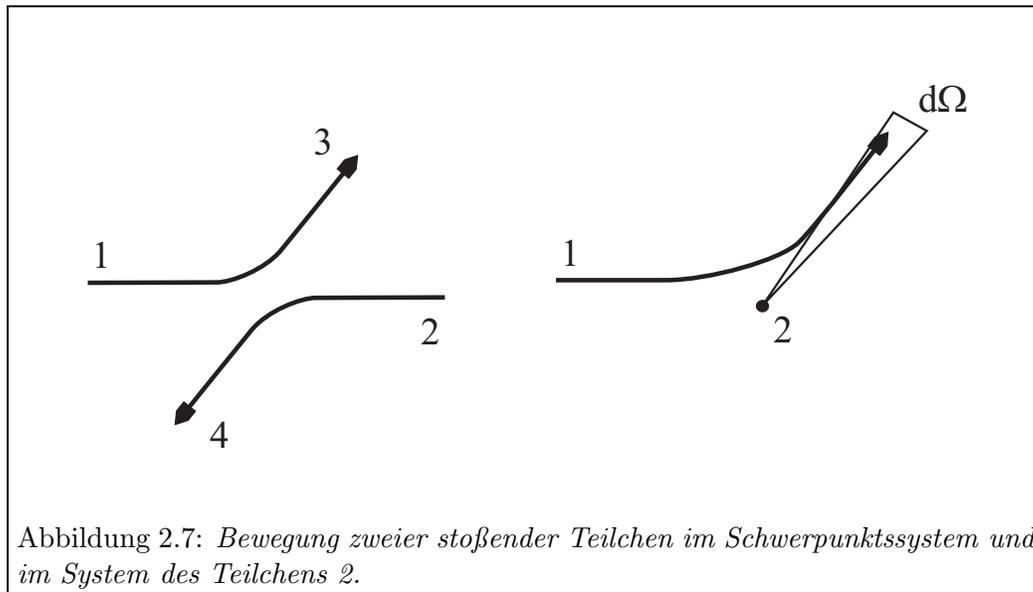


Abbildung 2.6: Änderung der Phasenraumdichte in einem kleinen Ausschnitt des Phasenraums durch den Phasenraumfluß, die Beschleunigung von Teilchen und Stöße zwischen Teilchen, dargestellt am Beispiel eines eindimensionalen Phasenraums.

für die Simulation der Verdampfungskühlung am Wichtigsten, denn er beschreibt die elastischen Stöße. Damit der Ausdruck berechenbar bleibt, sind drei Annahmen nötig. Die erste ist, daß die Dichte gering ist, so daß nur zwei-Körper Stöße eine Rolle spielen. Die zweite, daß sich die Verteilungsfunktion auf der Zeitskala der Stöße kaum ändert. Dann darf angenommen werden, daß die Stöße instantan erfolgen und nur zwischen Teilchen am selben Ort auftreten. Schließlich wird angenommen, daß die Impulse zweier Teilchen am selben Ort unkorreliert sind $F(\vec{r}, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = f(\vec{r}, \vec{p}_1) f(\vec{r}, \vec{p}_2)$. Dies ist bekannt unter dem Namen "Annahme des molekularen Chaos". Der Stoßterm kann in zwei Beiträge aufgeteilt werden. Ein Teilchen aus dem betrachteten Ausschnitt stößt mit einem Teilchen mit Impuls \vec{p}_2 . Nach dem Stoß besitzen die Teilchen die Impulse \vec{p}_3 und \vec{p}_4 , welche durch Energie- und Impulserhaltungssatz bestimmt sind (siehe Abbildung 2.7). Falls beide Impulse außerhalb des betrachteten Phasenraumausschnitts liegen, ist ein Teilchen aus diesem entfernt worden. Der zeitlich umgekehrte Vorgang fügt dem betrachteten Ausschnitt ein Teilchen hinzu.

Die Wahrscheinlichkeit der zu Teilchenverlust führenden Stöße ist proportional zur Wahrscheinlichkeit $f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) f(\vec{r}, \vec{p}_2, t)$ die beiden Stoßpartner vorzufinden. Nun muß noch beachtet werden, daß es sich bei den betrachteten Teilchen um Bosonen handelt. Dies führt dazu, daß in der Stoßwahrscheinlichkeit noch Bose-Verstärkungsfaktoren $(1 + f(\vec{r}, \vec{p}_3, t)) (1 + f(\vec{r}, \vec{p}_4, t))$ auftauchen, die dem Rechnung tragen, daß Teilchen verstärkt in schon besetzte Zustände hineinstreuen [Sno88]. Die Boltzmann-Gleichung unter Beachtung der bosonischen Natur der Stoßpartner ist auch unter dem Namen Uehling-Uhlenbeck Gleichung bekannt. Entsprechendes gilt für die Wahrscheinlichkeit des umgekehrten Vorgangs. Um die gesamte Änderung der Phasenraumdichte durch Stöße zu erhalten, muß über sämtliche Impulse der Stoßpartner und über sämtliche durch Energie- und Impulserhaltungssatz erlaubte Streurichtungen Ω integriert werden. Ω ist dabei der Winkel zwischen den Bahnen des ein- und auslaufenden ersten Teilchens im Ruhesystem des zweiten. Insgesamt erhält man für die Änderung der Phasenraumdichte



durch elastische Stöße

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{Stöße}} f = \frac{\sigma_0}{h^3 4\pi m} \int dp_2^3 d\Omega |\vec{p} - \vec{p}_2| f_3 f_4 (1 + f) (1 + f_2) - f f_2 (1 + f_3) (1 + f_4), \quad (2.44)$$

wobei σ_0 den s-Wellen Streuquerschnitt und m die Masse darstellen. f_i steht abkürzend für $f(\vec{r}, \vec{p}_i, t)$.

Die Gültigkeit der Uehling-Uhlenbeck Gleichung erstreckt sich bis in den Bereich, in dem die Besetzung des Grundzustands anfängt makroskopisch zu werden. Dann ist es nötig den Grundzustand gesondert zu behandeln. Die stationäre Lösung der Gleichung ist erwartungsgemäß die Boseverteilung.

Um diese Differentialgleichung mit einem gewöhnlichen Computer lösen zu können, ist eine erhebliche Vereinfachung notwendig. Die Annahme, die dazu gemacht wird, ist, daß das System ergodisch ist. Dies bedeutet nach Definition, daß der Mittelwert einer thermodynamischen Größe über die Zeit, gleich dem Mittelwert dieser Größe über das Ensemble aller Verwirklichungen eines Systems ist. Dies ist der Fall, sobald die Teilchenbahnen so chaotisch sind, daß eine Realisierung des Systems im Laufe der Zeit alle möglichen Konfigurationen abdeckt. Dann sind auch alle Bereiche des Phasenraums, die zur gleichen Energie gehören, gleich dicht besetzt, denn ein Teilchen dieser Energie wird durch die chaotische Bahn bald jeden ihm energetisch zugänglichen Bereich erreichen. Das bedeutet, daß alle Information schon in der energetischen Verteilungsfunktion enthalten ist, die ursprüngliche kann daraus zurückgewonnen werden

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \int d\varepsilon \delta(U(\vec{r}) + \vec{p}^2/2m - \varepsilon) f(\varepsilon). \quad (2.45)$$

Hier ist δ die Diracsche δ -Distribution und $U(\vec{r})$ das Potential.

Die Annahme chaotischer Teilchenbahnen ist in einer Falle, wie der in dem hier vorgestellten Experiment benutzten, die näherungsweise rotationssymmetrisch um eine Achse ist, nicht ohne weiteres gerechtfertigt. Erst die immer vorhandenen Abweichungen von der Rotationssymmetrie und besonders die elastischen Stöße führen dazu, daß die Ergodizität genügend groß ist.

Unter der Annahme genügender Ergodizität verliert man also keine Information wenn man die Boltzmann-Gleichung über Flächen konstanter Energie abintegriert. Die resultierende Differentialgleichung ist erheblich einfacher. Auf beide Seiten der Boltzmann-Gleichung wendet man den Integraloperator

$$\frac{1}{h^3} \int d^3r d^3p \delta(U(\vec{r}) + \vec{p}^2/2m - \varepsilon) \quad (2.46)$$

an und drückt die Phasenraumverteilungsfunktionen über (2.45) aus. Die daraus entstehende Differentialgleichung enthält nur noch die energetische Zustandsdichte $\rho(\varepsilon)$ und die energetische Verteilungsfunktion $f(\varepsilon)$. Dadurch verliert man allerdings jede Aussage über räumliche Effekte, wie zum Beispiel der verstärkten Evaporation an der Unterseite der Wolke durch die Wirkung der Gravitation. Das Ergebnis ist [Lui95]

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon) &= \frac{m\sigma}{\pi^2 \hbar^3} \int d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 d\varepsilon_4 \delta((\varepsilon + \varepsilon_2) - (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)) \times \\ &\rho(\min[\varepsilon, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]) \{f_3 f_4 (1 + f) (1 + f_2) - f f_2 (1 + f_3) (1 + f_4)\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Abkürzend wurde f_i für $f(\varepsilon_i)$ geschrieben. Die Terme in der Boltzmann-Gleichung, die eine Änderung der Phasenraumdicke aufgrund der Bewegung der Teilchen und aufgrund von Kräften beschreiben, haben sich aufgehoben und nur der Stoßterm ist übriggeblieben. Die δ -Distribution gewährleistet die Energieerhaltung. Daher rührt auch der Term $\min[\varepsilon, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]$.

Die Form des Fallenpotentials geht in die Differentialgleichung über die Zustandsdichte ein. Das Potential der magnetischen Falle kann durch den Ausdruck

$$U(\vec{r}) = \sqrt{A^2(x^2 + y^2) + (U_0 + Bz^2)^2} - U_0 \quad (2.48)$$

angenähert werden. In radialer Richtung (xy-Ebene) entspricht dies für große Abstände einem linearen Potential und in axialer Richtung (z) einem quadratischen. Daraus berechnet man die Zustandsdichte [Lui95] mit Hilfe von

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_{U(\vec{r}) \leq \varepsilon} d^3r \sqrt{\varepsilon - U(\vec{r})}, \quad (2.49)$$

und erhält

$$\rho(\varepsilon) = \tilde{\rho}(\varepsilon^3 + 2U_0\varepsilon^2) \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho} = \frac{(2m)^{3/2} \pi^3}{2h^3 A^2 B^{1/2}}. \quad (2.50)$$

Numerische Berechnung der Verdampfungskühlung

Unter Verwendung der energetischen Boltzmann-Gleichung (2.47) kann nun auf zwei verschiedene Arten eine Simulation der Verdampfungskühlung erstellt werden. Das erste Verfahren besteht darin die Gleichung numerisch zu lösen, das zweite verwendet weitere Näherungen um die Gleichung zu vereinfachen und wird in Abschnitt 2.2.4 erklärt.

Zur numerischen Berechnung muß die Boltzmann-Gleichung diskretisiert werden. Dazu wird die Energieskala in Intervalle $\varepsilon_i = (i + 1/2) \Delta\varepsilon$ der Größe $\Delta\varepsilon$ zerlegt. Das Integral geht in eine Summe über

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{f}_i &= \frac{m\sigma}{\pi^2 \hbar^3} (\Delta\varepsilon)^2 \sum_{j,k} \rho_h (f_k f_l (1 + f_i) (1 + f_j) - f_i f_j (1 + f_k) (1 + f_l)). \\ j + i &= k + l \quad h = \min(i, j, k, l) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dabei wurde abkürzend $\rho_i = \rho(\varepsilon_i)$ und $f_i = f(\varepsilon_i)$ geschrieben. Die δ -Distribution wurde zur energierhaltenden Nebenbedingung $j + i = k + l$ der Summation umgeschrieben. Während des Verdampfungskühlens sind nur Atome mit weniger Energie als der Abschneideenergie in der Falle gefangen. Für die numerische Behandlung genügt es also, nur die Energieintervalle bis zur Abschneideenergie zu betrachten.

Dieses System von Differentialgleichungen läßt sich mit dem Runge-Kutta Verfahren lösen. Bis die Simulation der Verdampfungskühlung vollständig ist, sind allerdings noch einige Verfeinerungen nötig. Zunächst muß beachtet werden, daß sich die Zeitskala der Verdampfungskühlung mit zunehmender Stoßrate verkürzt. Das bedeutet, daß die zeitliche Schrittweite in jedem Schritt an die Stoßrate angepaßt werden muß. Die Stoßrate läßt sich aus Gleichung (2.51) ablesen. $\rho_i \dot{f}_i$ ist die Änderung der Anzahl der Teilchen im Energieintervall i pro Zeit durch Stöße. Diese Änderung besteht aus zwei Beiträgen, den in das Energieintervall hineingestreuerten Teilchen und den aus ihm herausgestreuten Teilchen. Um die Anzahl der stoßenden Teilchen der Klasse ε_i pro Zeit zu erhalten, betrachtet man nur den zweiten Beitrag. Um die Gesamtzahl der stoßenden Teilchen pro Zeit zu erhalten muß über alle Klassen aufsummiert werden. Da man an der Zahl der Stöße pro Atom und Zeit interessiert ist, normiert man noch mit der Gesamtteilchenzahl N

$$\begin{aligned} \gamma_{el} &= \frac{1}{N} \frac{m\sigma}{\pi^2 \hbar^3} (\Delta\varepsilon)^3 \sum_{i,j,k} \rho_h f_i f_j (1 + f_k) (1 + f_l). \\ j + i &= k + l \quad h = \min(i, j, k, l) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Da diese Gleichung eine ähnliche Struktur wie Gleichung 2.51 hat, läßt sich die Berechnung beider Gleichungen im Programm zusammenziehen, so daß kaum zusätzliche Rechenzeit für die Stoßratenberechnung benötigt wird. In jedem Rechenschritt wird nun die Schrittweite neu angepaßt.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\gamma_{el}} \quad (2.53)$$

Δt_0 ist dabei eine von außen vorgegebene Genauigkeit in der Größenordnung 0,1.

Der Vorgang der Verdampfungskühlung selbst wird durch Null-setzen der Verteilungsfunktion oberhalb der Abschneideenergie berücksichtigt.

$$f(\varepsilon_i > \varepsilon_{cut}) \equiv 0 \quad (2.54)$$

Das bedeutet, daß ein Teilchen sofort entfernt wird, sobald es durch Stöße eine genügend hohe Energie erhalten hat und, im Gegensatz zur Wirklichkeit, keine Chance mehr hat, durch einen zweiten Stoß davonzukommen.

Verluste werden durch drei Terme beschrieben, die den Verlusten durch Hintergrundgas, zwei- und drei-Körperstößen entsprechen (siehe Abschnitt 2.2.3). Für Hintergrundgasstöße ist die Verlustrate unabhängig von der Dichte der Atome

$$\Delta N = -N \frac{\Delta t}{\tau}. \quad (2.55)$$

τ ist dabei die $1/e$ -Lebensdauer der Atome, die experimentell gemessen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom durch einen k -Körperstoß verloren geht, ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, daß $k - 1$ weitere Atome am Ort des ersten sind. Dies ist in einem homogenen Gas proportional zur Dichte der Wolke hoch $k - 1$. Den Gesamtteilchenverlust eines homogenen Gases der Dichte n in einem Volumen V erhält man indem man diese Wahrscheinlichkeit mit der Teilchenzahl N multipliziert

$$\Delta N = -R_k n^{k-1} N \Delta t = -R_k n^k V \Delta t. \quad (2.56)$$

R_k ist dabei eine Ratenkonstante, die aus theoretischen Berechnungen bis auf eine Größenordnung bekannt ist [Boe96], [Fed96] oder gemessen werden kann [Bur97]. Für ein inhomogenes Gas ist diese Gleichung nur lokal gültig. Der Gesamtverlust ergibt sich durch Integration über das Volumen

$$\dot{N} = -R_k \int dV n^k = -R_k \langle n^k \rangle. \quad (2.57)$$

Die Größe $\langle n^k \rangle$ kann unter Kenntnis der Potentialform aus Temperatur und Teilchenzahl berechnet werden (siehe Abschnitt 6.1). Nach jedem Zeitschritt Δt werden die Gesamtverluste berechnet und die Verteilungsfunktion f_i auf die neue Gesamtteilchenzahl normiert.

Ein Heizprozeß der Leistung P_H erhöht die Energie jeden Teilchens um $\Delta E_H = P_H \Delta t$. Da nur diskrete Energieklassen betrachtet werden, muß eine kontinuierliche Erwärmung dadurch simuliert werden, daß ein entsprechender Bruchteil an Teilchen eine Energie $\Delta \varepsilon$ gewinnt und in die nächste Energieklasse aufsteigt. Dies wird dadurch kompliziert, daß die Zustandsdichte in den verschiedenen Energieklassen unterschiedlich ist. Der Energiegewinn der Klasse i ist $\Delta E_i = N_i P_H \Delta t$, mit $N_i = \rho_i f_i \Delta \varepsilon$, der Zahl der Teilchen der Klasse i . Also müssen $\Delta N_i = \Delta E_i / \Delta \varepsilon$ Teilchen nach $i + 1$ wechseln. Dies entspricht einer Änderung der Besetzung von $\Delta f_i =$

$\Delta N_i / \rho_i \Delta \varepsilon = -f_i P_H \Delta t / \Delta \varepsilon$. Gleichzeitig werden Teilchen von $i - 1$ nach i geheizt. Insgesamt ergibt sich also

$$\Delta f_i = \left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} f_{i-1} - f_i \right) \frac{P_H \Delta t}{\Delta \varepsilon}. \quad (2.58)$$

Nun fehlt noch ein wichtiger Schritt, dann ist der Kern der Simulation abgeschlossen. In die numerische Berechnung werden nur die ersten 32 Energieintervalle einbezogen. Die Größe der Intervalle ist so bemessen, daß die maximal betrachtete Energie oberhalb der Abschneideenergie liegt. Diese sinkt im Laufe der Verdampfungskühlung um mehrere Größenordnungen. Deswegen verringert sich die Anzahl der Energieintervalle, mit denen effektiv gerechnet wird immer mehr. Um dem entgegenzuwirken, wird die Größe der Intervalle halbiert, sobald die Abschneideenergie unter die Hälfte der maximal betrachteten Energie gefallen ist. Dadurch bleibt die Genauigkeit erhalten.

Berechnung thermodynamischer Größen

Nun müssen aus der energetischen Zustandsdichte und der energetischen Verteilungsfunktion alle interessanten Größen berechnet werden. Die Peak-Phasenraumdichte erhält man aus Gleichung (2.45), indem man $\vec{r} = \vec{p} = 0$ setzt.

$$\rho_{Peak} = f(\vec{r} = 0, \vec{p} = 0) = f(\varepsilon = 0) \quad (2.59)$$

Sie entspricht also der Besetzung des Grundzustands. Um die Peak-Dichte zu erhalten, berechnet man zunächst die Dichte.

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{h^3} \int d^3 p f(\vec{r}, \vec{p}) \quad (2.60)$$

Mit (2.45) und der Substitution $x = p^2/2m$ erhält man einen Ausdruck, in dem nur noch ein Integral über die Energie auftaucht. Daraus ergibt sich die Peak-Dichte:

$$n(\vec{r}) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int d\varepsilon f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon - U(\vec{r})} \quad (2.61)$$

$$n_{Peak} = n(\vec{r} = 0) = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int d\varepsilon f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \quad (2.62)$$

Die Gesamtteilchenzahl erhält man als Integral über die Dichte. Dabei taucht ein Ausdruck auf, den man mit (2.49) als energetische Zustandsdichte identifiziert. Man erhält

$$N = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon). \quad (2.63)$$

Die Verteilungsfunktion ist zu Beginn eine Boltzmann-Verteilung. Sie wird aus gegebener Anfangstemperatur und Anfangsteilchenzahl berechnet. Zur Normierung wird (2.63) benutzt. Um die Temperatur zu einem späteren Zeitpunkt zu

bestimmen, wird an die niederenergetische Hälfte der Verteilungsfunktion eine Boltzmann-Verteilung angepaßt. In diesem unteren Bereich ist die Verteilung noch nicht zu stark durch das Verdampfen verzerrt. Aus demselben Fit ergibt sich auch $\rho_{Peak} = f(\varepsilon = 0)$. Schließlich kann noch die Gesamtenergie berechnet werden.

$$E = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) \varepsilon \quad (2.64)$$

Alle so erhaltenen Größen lassen sich auch in der Simulation bestimmen, indem man die Integrale diskretisiert. Aufbauend darauf ergeben sich weitere Größen, wie zum Beispiel der Abschneideparameter η , oder $\langle n^k \rangle$.

Simulation mit der Näherung abgeschnittener Boltzmann-Verteilungen

Wie schon weiter oben erwähnt, läßt sich die energetische Boltzmann-Gleichung (2.47) unter einer zusätzlichen Annahme, der Näherung abgeschnittener Boltzmann-Verteilungen, vereinfachen. Diese Näherung besteht darin anzunehmen, daß die energetische Verteilungsfunktion gut durch eine abgeschnittene Boltzmann-Verteilung

$$f(\varepsilon) = n_0 \lambda^3 e^{-\beta\varepsilon} \Theta(\varepsilon_{cut} - \varepsilon) \quad (2.65)$$

beschrieben wird. Dabei ist Θ die Heavisidesche Stufenfunktion, die $f(\varepsilon)$ oberhalb von ε_{cut} null setzt, und n_0 eine Normierungskonstante, die in etwa die Peak-Dichte ist (siehe Abschnitt 6.1). Diese Näherung ist für die Verdampfungskühlung gut erfüllt. Dies kann dadurch verifiziert werden, daß man die Verteilungsfunktionen, die durch numerisches Lösen der Boltzmann-Gleichung berechnet werden, mit abgeschnittenen Boltzmann-Verteilungen vergleicht. Die abgeschnittene Boltzmann-Verteilung ist, unter Kenntnis des Potentials, vollständig durch Angabe der Teilchenzahl, der Temperatur und der Abschneideenergie spezifiziert. Man kann nun Differentialgleichungen für die Teilchenzahl und die Temperatur berechnen (siehe [Lui95]). Um die Rate der verdampften Teilchen zu erhalten, setzt man die abgeschnittene Boltzmann-Verteilung (2.65) in die energetische Boltzmann-Gleichung (2.47) ein und integriert über alle Energieniveaus oberhalb der Abschneideenergie ab $\dot{N}_{ev} = - \int_{\varepsilon_t}^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon)$. Die verdampften Teilchen tragen Energie mit der Rate $\dot{E}_{ev} = - \int_{\varepsilon_t}^{\infty} d\varepsilon \varepsilon \rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon)$ davon. Aus $E = \int d\varepsilon \varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon)$ erhält man eine Beziehung zwischen Energie und Temperatur, mit Hilfe derer man die Temperaturänderung berechnen kann. Die Simulation der Verdampfungskühlung geschieht durch numerisches Lösen der so erhaltenen Differentialgleichungen unter Beachtung der Verluste durch Hintergrundgas Stöße (Gleichung (2.55)), zwei- und drei-Körper Stöße (Gleichung (2.57)) und einer Heizrate. Die zeitliche Schrittweite muß wieder an die Stoßrate angepaßt werden (Gleichung (2.53)). Alle thermodynamischen Größen lassen sich aus der Temperatur, der Teilchenzahl und der Abschneideenergie gewinnen (siehe Abschnitt 6.1).

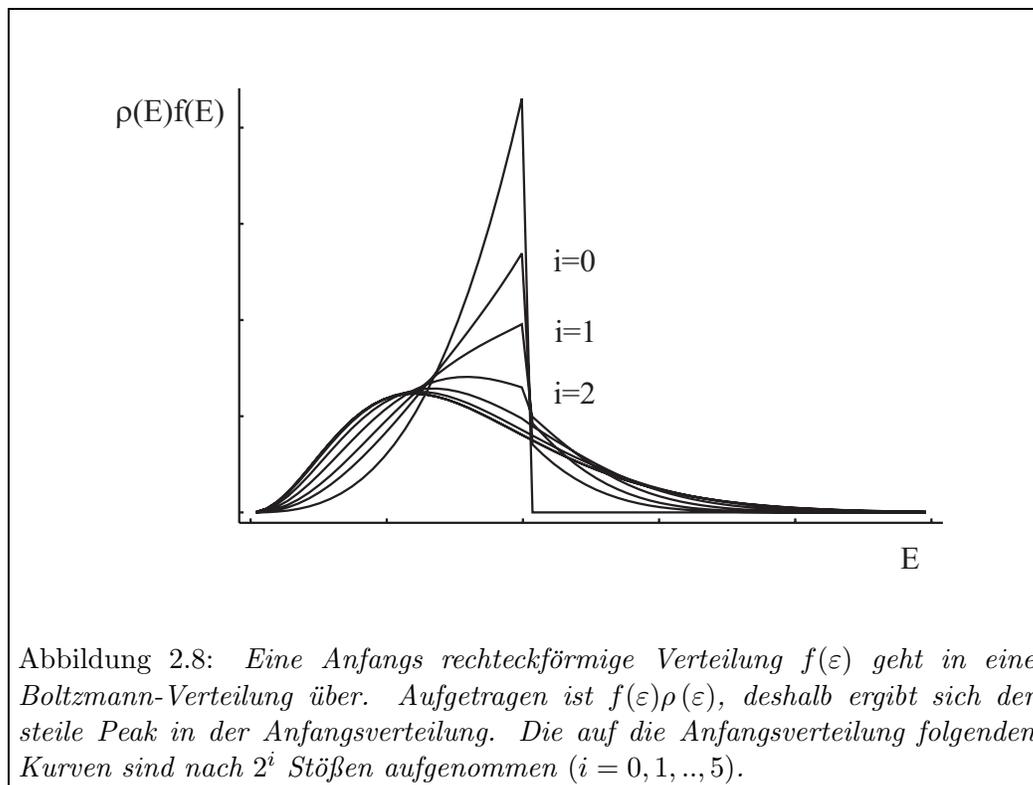
Diese Art der Simulation hat den Vorteil, daß sie nicht rechenintensiv ist. Sie läßt durch die zusätzliche Annahme aber keine so allgemeinen Untersuchungen zu wie

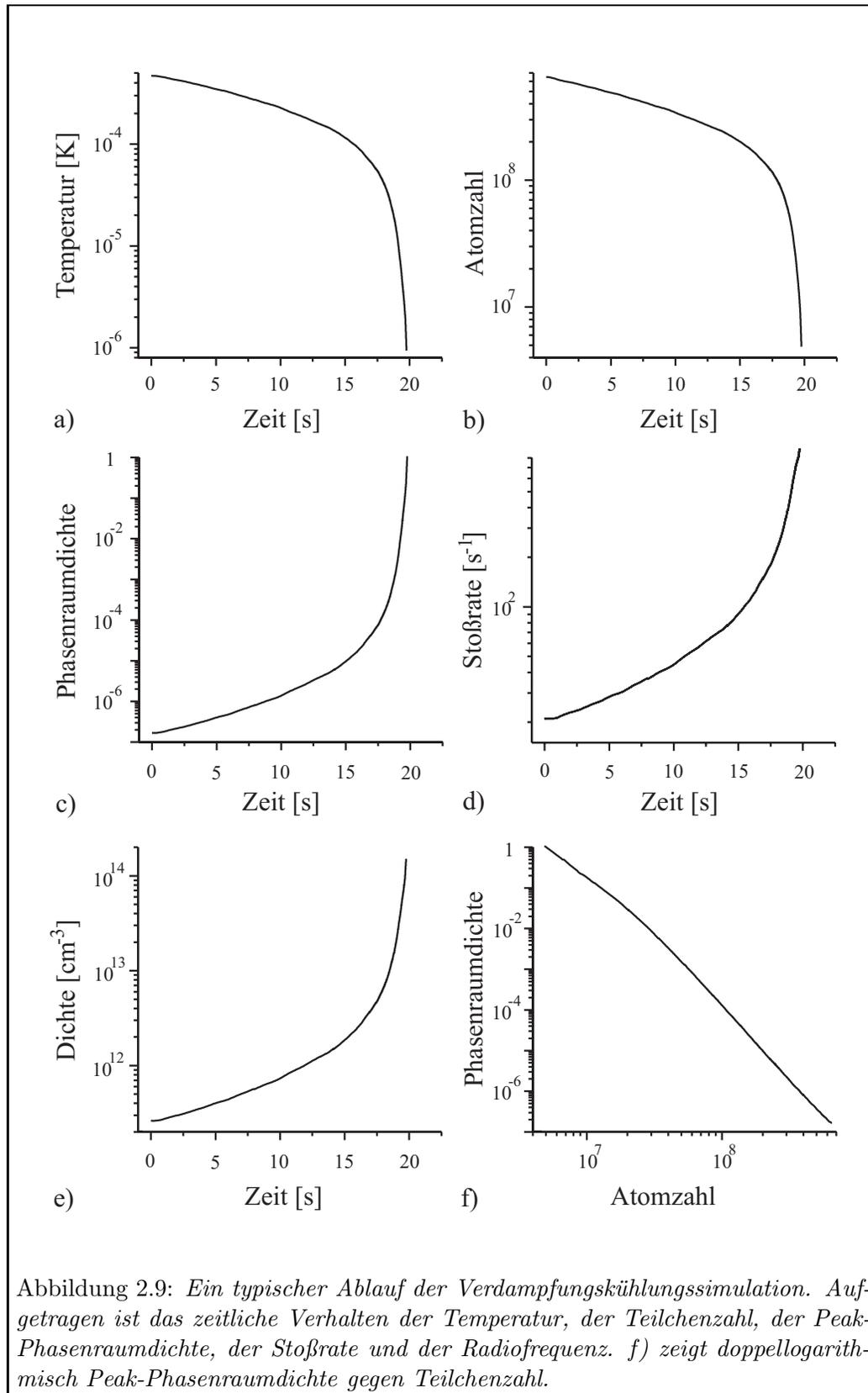
die direkte numerische Lösung der energetischen Boltzmann-Gleichung. Dadurch daß zwei unabhängige Simulationsarten verwendet werden können, ergibt sich die Möglichkeit, beide miteinander zu vergleichen und so Fehler aufzuspüren. Im Folgenden wird die Methode der abgeschnittenen Boltzmann-Verteilungen verwendet, außer bei der Optimierung des Radiofrequenzverlaufs.

2.2.5 Untersuchungen mit der Simulation

Dauer der Thermalisierung

Eine erste interessante Frage, die man mit der Simulation untersuchen kann, ist, wieviele elastische Stöße notwendig sind, damit eine Nichtgleichgewichtsverteilung thermalisiert. Mit dieser Zahl skaliert die Dauer des Verdampfungskühlens. Als Nichtgleichgewichtsverteilung wird eine Gleichverteilung der Energieniveaus bis zu einer Abschneideenergie vorgegeben. Nun wird die Verteilungsfunktion nach 2^i Stößen berechnet und in Abbildung 2.8 dargestellt. Man erkennt, daß die Verteilung schon nach wenigen Stößen einer abgeschnittenen Boltzmann-Verteilung entspricht. Schon nach im Mittel 8 Stößen pro Atom ändert sie sich nur noch langsam [Sno88].





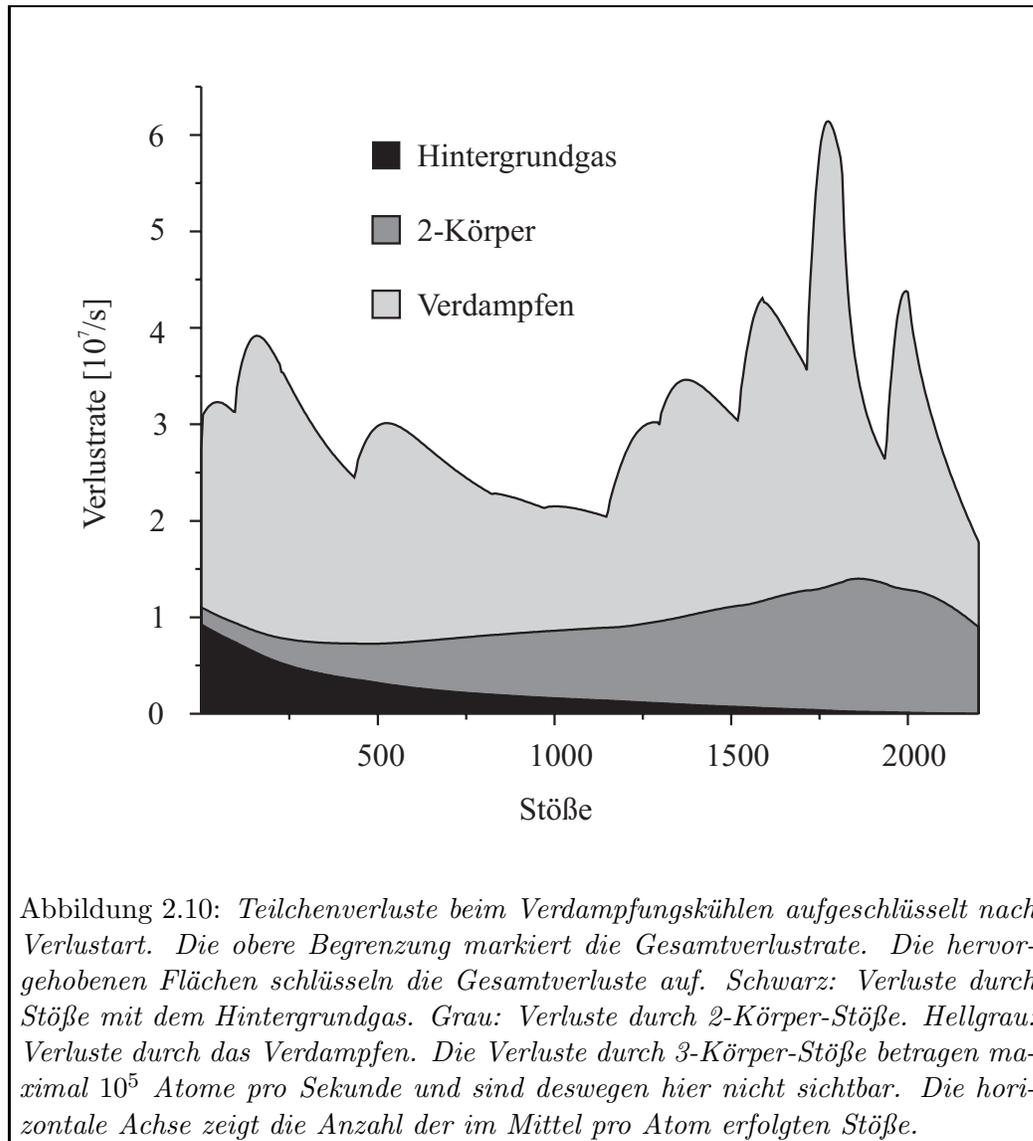
Typischer Verlauf

Nun soll ein typischer Verlauf der Verdampfungskühlung besprochen werden. Als Eingabeparameter benötigt die Simulation die Anfangsteilchenzahl, die Anfangstemperatur, die Form des Fallenpotentials, die Lebensdauer der Wolke, die zwei- und drei-Körper Stoß Verlustratenkonstanten und die Heizrate. Wie man diese Parameter erhält ist in Abschnitt 4.1.1 erklärt. Zusätzlich sind Angaben zur Rechengenauigkeit und der Verlauf der Abschneideenergie nötig. Den Verlauf der Abschneideenergie kann man auf drei Arten gewinnen. Entweder man gibt ihn explizit an. Oder man gibt einen Abschneideparameter η fest vor und die Abschneideenergie wird aus $E_{cut} = \eta k_B T$ berechnet. Schließlich kann man eine Optimierungsgröße vorgeben und den optimalen Verlauf der Abschneideenergie berechnen lassen (siehe Abschnitt 2.2.6). Die Simulation wird beendet, sobald die Peak-Phasenraumdicke 2,6 überschreitet, also das Kriterium für die Bose-Einstein-Kondensation eines homogenen Gases erreicht ist (siehe Gleichung (2.8)). Für einen typischen Verlauf der Verdampfungskühlung werden die Anfangsparameter aus dem Experiment verwendet und der Radiofrequenzverlauf, wie in Abschnitt 2.2.6 gezeigt, mit der Simulation optimiert. Einige Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 2.9 dargestellt. Sie zeigt den Verlauf von Temperatur, Teilchenzahl, Peak-Phasenraumdicke, Stoßrate, Dichte und der Radiofrequenz. Die Temperatur nimmt von Anfangs $470 \mu K$ auf unter $1 \mu K$ ab. Die Teilchenzahl verringert sich um 2 Größenordnungen von $4,7 \cdot 10^8$ auf $1 \cdot 10^6$ in der thermischen Wolke beim Einsetzen der Kondensation. Die Peak-Phasenraumdicke steigt um 7 Größenordnungen. Interessant ist dabei, daß der größte Fortschritt in den letzten Sekunden stattfindet. Warum dies so ist, erkennt man, wenn man das Wachstum der Stoßrate verfolgt. Je größer die Stoßrate, desto schneller schreitet der Verdampfungskühlungsvorgang voran und desto schneller wächst auch die Stoßrate. Das bedeutet man befindet sich im Bereich der gallopiierenden Verdampfungskühlung. Die Verdampfungskühlung beschleunigt sich selbst also immer mehr. Die Dichte steigt um drei Größenordnungen. In doppellogarithmischer Darstellung sieht man den Anstieg der Peak-Phasenraumdicke mit abnehmender Teilchenzahl als Gerade. Pro verlorener Größenordnung in der Teilchenzahl werden 3 Größenordnungen in der Phasenraumdicke gewonnen.

Verlustarten

Mit der Simulation kann der Ablauf des Verdampfungskühlens genauer untersucht werden, als dies mit dem Experiment allein möglich wäre. Interessant ist beispielsweise zu betrachten, wie sich der Gesamtteilchenverlust auf die verschiedenen Verlustmechanismen aufteilt (siehe Bild 2.10). Aufgetragen sind die Verlustarten der verschiedenen Prozesse über die Zeit, welche in Einheiten der Stoßzeit $1/\gamma_{el}$ aufgetragen ist. Da sich die Stoßrate ändert ist dies keine lineare Zeitskala, aber es ist die natürliche Zeitskala der Verdampfungskühlung. Verluste durch Verdampfen von Atomen machen während des gesamten Verdampfungskühlens etwas über die Hälfte aller Verluste aus. Die unregelmäßige Struktur in dieser Verlustrate ist eine

Folge des experimentell optimierten Radiofrequenzverlaufs, der aus mehreren exponentiell abfallenden Teilstücken zusammengesetzt ist. Der größte Teil der restlichen Verluste wird Anfangs von Hintergrundgasstoßverlusten ausgemacht. Diese Verluste sinken mit abnehmender Teilchenzahl. Da die Dichte schnell steigt, werden Verluste durch zwei-Körper Stöße bald wichtiger als solche durch Hintergrundgasstöße. Alle Verluste sinken am Ende wegen der abnehmenden Gesamtteilchenzahl. Die drei-Körper Verluste werden nie wichtig.



2.2.6 Optimierung des Verlaufs der Abschneideenergie

Um Bose-Einstein-Kondensate mit einer hohen Teilchenzahl zu erzeugen, ist es nötig, den zeitlichen Verlauf der Abschneideenergie zu optimieren. Die beste Optimierung wäre eine globale, bei welcher der gesamte Verlauf auf das Endresultat optimiert wird. Dies ist zu rechenaufwendig um es sinnvoll durchzuführen. Es kann gezeigt werden [Ket96b] daß eine lokale Optimierung, wie sie im Folgenden vorgestellt wird, dasselbe Ergebnis liefert. Es bieten sich mehrere Größen an, auf die man den Verlauf optimieren kann. Die beiden besten sind die Peak-Phasenraumdicke und die Stoßrate bei einer gegebenen Endteilchenzahl. In der Simulation läuft die Optimierung der Stoßrate folgendermaßen ab. (a) Aus der Anfangsteilchenzahl wird eine Zielteilchenzahl bestimmt $N_{Ziel} = cN_{Anfang}$ wobei c eine vorgegebene Konstante, zum Beispiel $c = 0,95$ ist. Die Anfangsverteilungsfunktion wird abgespeichert und der Verdampfungskühlvorgang bis zur Zielteilchenzahl durchgeführt. Die Zielteilchenzahl muß sehr genau erreicht werden um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Deswegen wird zweimal der Zeitschritt Δt_0 , kurz vor Erreichen der Zielteilchenzahl, um einen Faktor 10 verringert. Während dieses Rechenvorgangs wird die Abschneideenergie mit konstanter Steigung nach unten gefahren. Ist die Zielteilchenzahl erreicht, gibt die Stoßrate die Optimierungsgröße vor. Nun wird die Simulation wieder in den zuvor abgespeicherten Zustand zurückversetzt und mit veränderter Steigung nochmals bis zur Zielteilchenzahl gerechnet. Damit wird die optimale Steigung bestimmt. Ist sie zu einer vorgegebenen Genauigkeit bekannt, wird das Verfahren wieder bei (a) neu begonnen. Aus so gewonnenen Verläufen der Abschneideenergie läßt sich ablesen, daß die Optimierung auf die Stoßrate die besten Ergebnisse liefert, aber die Optimierung auf die Peak-Phasenraumdicke nur unwesentlich schlechter ist.

Im Experiment wird ein ganz ähnliches Optimierungsverfahren verwendet. Betrachtet man doppellogarithmisch aufgetragen die Peak-Phasenraumdicke über die Teilchenzahl, so erhält man eine Gerade. Man möchte bei einer gegebenen Teilchenzahl eine möglichst hohe Peak-Phasenraumdicke erreichen. Das bedeutet die Steigung der Geraden sollte möglichst groß sein. Diese Steigung ist eine gute Optimierungsgröße. Sie ist gegeben durch

$$\rho_{Opt}(\rho, N) = \frac{\ln(\rho/\rho_0)}{\ln(N/N_0)}, \quad (2.66)$$

wobei ρ_0 die Peak-Phasenraumdicke und N_0 die Teilchenzahl vor dem Beginn der Verdampfungskühlung darstellen. Die Peak-Phasenraumdicke ist nicht direkt experimentell meßbar, aber die Temperatur und die Teilchenzahl, aus der sie berechnet werden kann (siehe Abschnitt 6.1).

Wie verläuft nun der experimentelle Optimierungsvorgang konkret ab? Zunächst wird ohne Verdampfungskühlung ρ_0 und N_0 bestimmt. Die Anfangsabschneideenergie $E_{cut} = \eta k_B T$ wird so gewählt, daß η etwa 10 ist. Bei der im Experiment vorliegenden Anfangstemperatur von $470 \mu K$ entspricht dies etwa einer Radiofrequenz von $50 MHz$. In jedem Optimierungsschritt wird die Zielfrequenz halbiert

(siehe Abbildung 2.11). Jeder Optimierungsschritt selbst besteht aus mehreren Versuchsdurchläufen, bei denen jeweils bis zur Zielfrequenz gekühlt und dabei die zeitliche Dauer des letzten Kühlsteps variiert wird. Hat man das Optimum gefunden, halbiert man die Zielfrequenz und so fort.

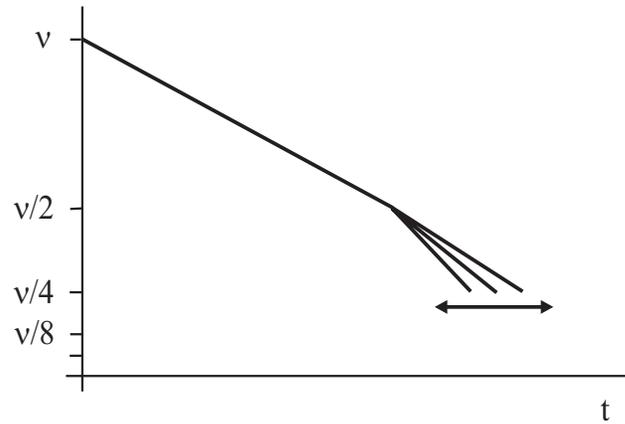


Abbildung 2.11: Die Optimierung des Radiofrequenzverlaufs. In jedem Optimierungsschritt wird die Zielradiofrequenz halbiert. Jeder Schritt selbst besteht aus mehreren experimentellen Durchläufen mit veränderter Dauer der Radiofrequenzstrahlung.

Kapitel 3

Der experimentelle Aufbau

Der Aufbau des hier vorgestellten Experimentes wurde schon ausführlich in [Sch96] und [Mar97] beschrieben. Deswegen erfolgt nun eine Zusammenfassung des schon Dokumentierten und nur die seither durchgeführten Verbesserungen, insbesondere das Abbildungssystem, werden ausführlich besprochen.

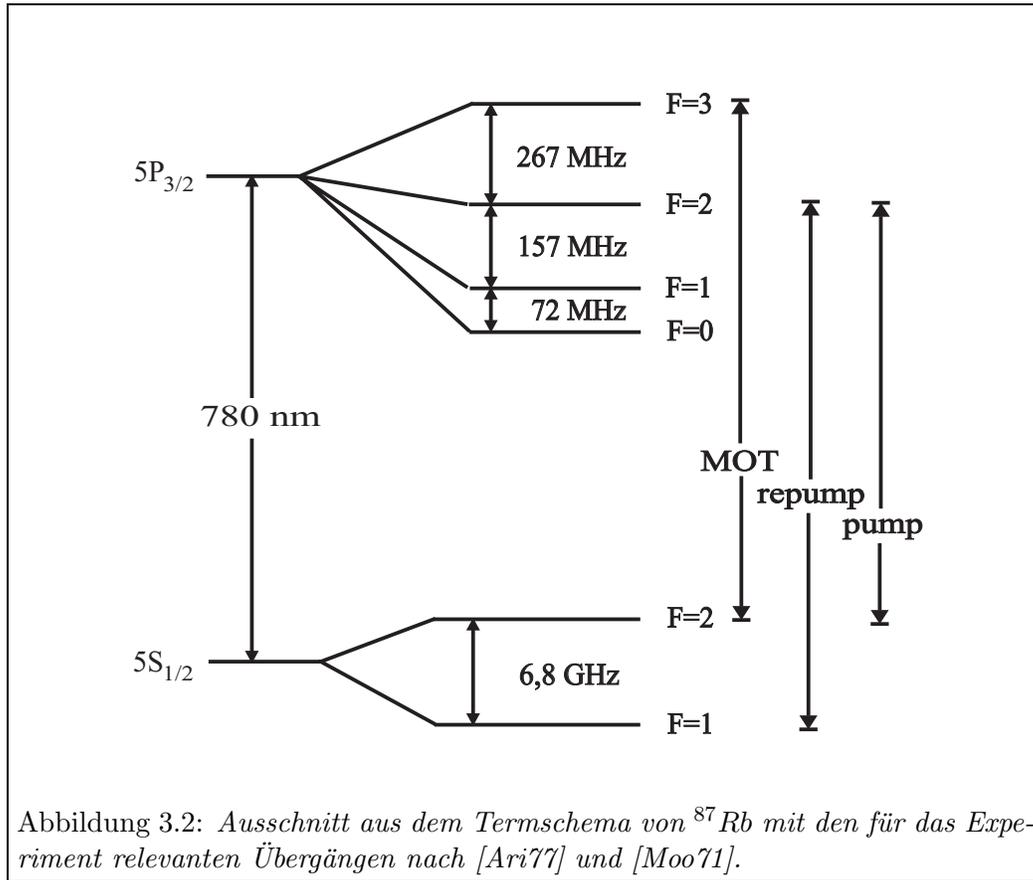
3.1 Wahl der Atomsorte

Die verwendete Atomsorte ist ^{87}Rb . Dieses Isotop hat mehrere Vorzüge. Zunächst befindet sich die für magneto-optische Fallen verwendete D_2 -Linie bei 780 nm , einem Wellenlängenbereich, für den gute Laserdioden existieren. Der zweite Vorteil ist die große positive elastische s-Wellen Streulänge von 109 Bohrschen Radien. Dies unterscheidet es von ^{85}Rb , dessen Streulänge negativ ist. Eine negative Streulänge bedeutet, daß das Streupotential anziehend ist. Dadurch werden die Kondensate instabil, sobald sie eine gewisse Teilchenzahl überschritten haben [Bra95]. Da ^{87}Rb zwei Hyperfeinstrukturgrundzustände mit $F = 1$ und $F = 2$ besitzt, ergibt sich die Möglichkeit in beiden Zuständen Bose-Einstein-Kondensate herzustellen [Mya97]. Da der $F = 2$, $m_F = 2$ Zustand durch die Zeeman-Aufspaltung ein doppelt so steiles Potential erfährt wie der $F = 1$, $m_F = -1$ Zustand¹, wird dieser verwendet.

3.2 Das Doppel-MOT System

Die Atomquelle besteht aus zwei senkrecht übereinander angeordneten magneto-optischen Fallen (MOT) (siehe Abbildung 3.1). Die Vakuumzelle der oberen MOT ist an ein beheiztes Rb -Reservoir angeschlossen, dadurch kann der Dampfdruck in

¹ $g_{F=2} = 0,5$, $g_{F=1} = -0,5$



sem auch in den nichtgefangenen $5S_{1/2}$ $F = 1$ Zustand fallen, ist es nötig, einen resonanten Rückpumpplaser von $5S_{1/2}$ $F = 1$ nach $5P_{3/2}$ $F = 2$ einzustrahlen, der die Atome wieder in den Fallenzyklus zurückpumpt (siehe Abbildung 3.2). Um die Atome von der oberen in die untere MOT zu transferieren werden sie mit resonantem Lichtdruck beschleunigt [Mya97]. Der Transfer wird so oft wiederholt bis etwa 10^9 Atome in der unteren MOT vorhanden sind. Dies ist nach etwa 60 Transferzyklen der Fall. Nun werden die Atome auf das Umladen in die magnetische Falle vorbereitet. Dazu wird zunächst die MOT komprimiert um eine etwas höhere Dichte zu erreichen. Dies geschieht dadurch, daß das MOT Magnetfeld während 100ms linear erhöht und gleichzeitig die Laserintensität verringert wird [Pet94]. Im Anschluß daran wird das MOT-Magnetfeld ausgeschaltet und die Atome in einer optischen Melasse innerhalb von 4ms auf etwa $40\text{ }\mu\text{K}$ gekühlt. Da nicht jeder Hyperfeinstrukturzustand in der magnetischen Falle gefangen wird, ist es nötig, die Atome in den Zustand $5S_{1/2}$ $F = 2$, $m_F = 2$ optisch zu pumpen. Dazu wird ein homogenes Magnetfeld, erzeugt von einem Helmholtz-Spulen Paar, angelegt und ein σ -polarisierter Laserstrahl von $5S_{1/2}$ $F = 2$ nach $5P_{3/2}$ $F = 3$ parallel zur Magnetfeldrichtung eingestrahlt. In entgegengesetzter Richtung wird ein ebenfalls σ -polarisierter Rückpumpstrahl eingestrahlt, so daß sich der Impulsübertrag beider Laserstrahlen nahezu aufhebt.

3.3 Die magnetische Falle

Wie in Abschnitt 2.2.2 erklärt, besteht die magnetische Falle aus einem Magnetfeld das an keinem Ort verschwindet, jedoch ein lokales Minimum aufweist. Im Folgenden wird erklärt wie dieses Magnetfeld erzeugt wird, welche Eigenschaften es hat und wie man die Atome aus der unteren MOT in die magnetische Falle umlädt.

Aufbau der magnetischen Falle

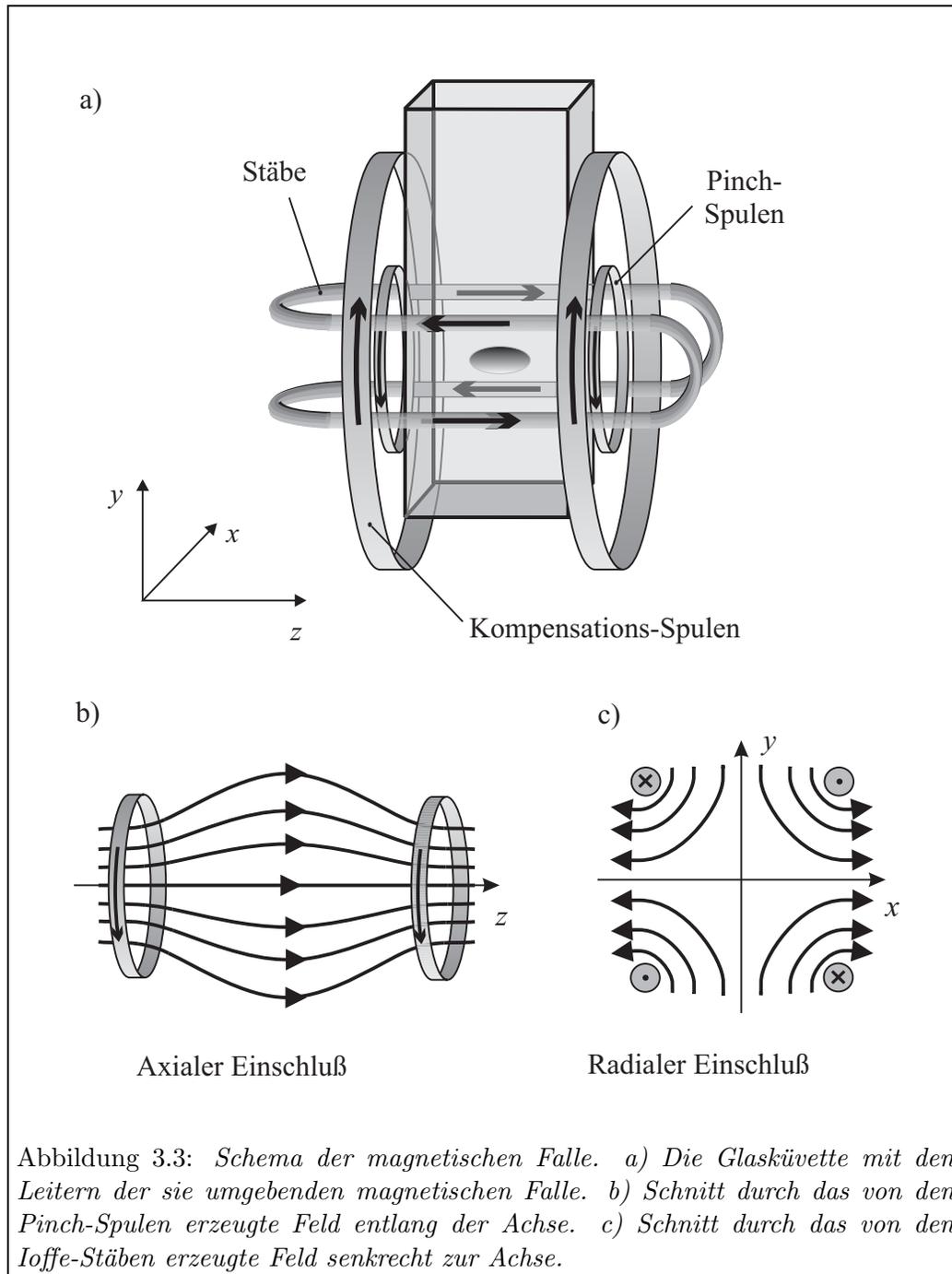
Die verwendete magnetische Falle ist vom Ioffe-Pritchard Typ. Das Magnetfeld wird von Leitern erzeugt, welche die Glasküvette umgeben, in der sich die untere MOT befindet (siehe Abbildung 3.3 a). Sie bestehen aus Kupferrohren, die von Kühlwasser durchflossen werden. Das Magnetfeld für den Einschluß der Atome in der radialen Ebene senkrecht zur Fallenachse, wird von vier Leitern ("Stäben") erzeugt, die parallel zur Fallenachse in einem Quadrat angeordnet sind und alternierend von Strom durchflossen werden. Bei dem erzeugten Feld handelt es sich um ein zweidimensionales Quadrupolfeld (siehe Abbildung 3.3 c). Die Stäbe sind an den Enden durch "Stababschlüsse" miteinander verbunden. Der Einschluß in Richtung der Achse wird durch das Feld zweier sogenannter "Pinch"-Spulen hervorgerufen. Dabei handelt es sich um ein gleichsinnig stromdurchflossenes Spulenpaar. Der Abstand der beiden Spulen ist gegenüber dem einer entsprechenden Helmholtz-Anordnung vergrößert, wodurch sich in der Mitte zwischen den Spulen ein Magnetfeldminimum ergibt (siehe Abbildung 3.3 b). Sowohl die Stababschlüsse, als auch die Pinch-Spulen erzeugen ein homogenes Feld parallel zur Fallenachse ("Offset"-Feld). Dieses Feld sorgt dafür, daß das Gesamtmagnetfeld nirgends verschwindet. Die Form des Potentials in der radialen Ebene hängt von der Größe des Offset-Feldes ab und ist um so steiler, je geringer das Offset-Feld ist. Um das Feld reduzieren zu können verwendet man für die Stäbe und die Pinch-Spulen je ein Helmholtz-Spulen Paar, das ein homogenes Feld in entgegengesetzter Richtung erzeugt, die sogenannten Stab- und Pinch-Kompensations-Spulen.

Potentialform

Der Betrag des Magnetfeldes und dazu proportional die Potentialform ist in guter Näherung durch

$$B(\rho, z) = \sqrt{A^2 \rho^2 + (B_0 + Bz^2)^2} \quad (3.1)$$

gegeben, wobei ρ den Abstand von der Fallenachse in radialer Richtung bezeichnet. A hängt vom Strom aller Spulen, B vom Strom durch die Pinch-Spulen ab, und B_0 ist der Betrag des Offset-Magnetfeldes. Für große Abstände verhält sich das Potential in radialer Richtung linear. In axialer Richtung ist es harmonisch. Für Abstände, bzw. Offset Magnetfelder die den Bedingungen $A^2 (x^2 + y^2) < B_0^2$ und



$Bz^2 < B_0^2$ gehorchen, läßt sich das Magnetfeld zu

$$B(\vec{r}) = B_0 + \frac{A^2 \rho^2}{2B_0} + Bz^2 \quad (3.2)$$

entwickeln. Das Potential ist unter diesen Umständen in allen Richtungen harmonisch. Durch Angabe der Oszillationsfrequenzen eines Teilchens in den verschiede-

nen Richtungen eines solchen Potentials wird dieses charakterisiert. Wie man an Gleichung (3.2) erkennen kann, wird der Einschluß in radialer Richtung stärker, je kleiner das Offset-Feld ist. Außerdem ist das Potential für kleine Offset-Felder über einen größeren Bereich linear. Beide Effekte sind für die Verdampfungskühlung erwünscht. Deswegen versucht man das Offset-Feld so klein wie möglich einzustellen, aber groß genug, daß keine Teilchenverluste durch Majorana-Spin-Flips auftreten.

Stabilität des Potentials

Damit die Verdampfungskühlung auch am Ende des Kühlvorgangs funktioniert, müssen an die Stabilität des Offset-Magnetfeldes hohe Anforderungen gestellt werden. Wie man an Abbildung 2.5 und der Gleichung $h\nu = \mu_B g_F B$ erkennen kann, gibt das Offset-Magnetfeld die Endradiofrequenz ν_{end} vor. Diese Frequenz muß so eingestellt werden, daß die energiereichsten Teilchen, die in der Falle verbleiben, eine Energie von $\eta k_B T_c$ haben, mit $\eta \approx 8$. Das heißt, sie muß um etwa $\Delta\nu = \eta k_B T_c / (hm_F) = 50 \text{ kHz}$ über der durch $h\nu_0 = \mu_B g_F B_0$ vorgegebenen Frequenz ν_0 liegen, die der Resonanz eines Atoms am Fallboden entspricht. Fluktuiert das Offset-Feld B_0 , so schwankt auch ν_0 . Da die Endradiofrequenz jedoch von außen vorgegeben ist, schwankt $\nu_{end} - \nu_0(t)$, also auch die Endabschneideenergie. Ist diese Schwankung in derselben Größenordnung oder größer als $\Delta\nu$, so kann die Verdampfungskühlung nicht mehr funktionieren.

Die Ströme, welche die Magnetfelder erzeugen, liegen in der Größenordnung von 500 A und fluktuieren in der Größenordnung von $0,1 \text{ A}$. Die Pinch-Spulen erzeugen ein Offset-Feld von etwa 1 G/A . Also schwankt das Offset-Feld dieser Spulen um etwa 100 mG . Würden die Pinch-Kompensations-Spulen von einem unabhängig fluktuierenden Strom durchflossen, so würde das Gesamtoffset-Feld um mindestens diese 100 mG schwanken, was ν_0 um etwa 70 kHz ändert. Dies ist größer als $\Delta\nu$, das heißt das Verdampfungskühlen würde am Schluß nicht mehr funktionieren. Sind die Pinch-Spulen und die Pinch-Kompensations-Spulen in Serie geschaltet, so fluktuieren die von ihnen erzeugten Felder in gleicher Weise. Da beide Felder sich gegenseitig beinahe komplett aufheben, fluktuiert das resultierende Offset-Magnetfeld kaum noch. Dieselben Überlegungen gelten auch für die Stab-Abschlüsse und die Stab-Abschluß-Kompensation. Da das Offset-Magnetfeld der Stababschlüsse jedoch gering ist (etwa 25 G) ist der Effekt weit weniger drastisch.

Beschaltung der Falle

Die Beschaltung der Falle ist in Abbildung 3.4 gezeigt. Die Stäbe und die Stab-Kompensations-Spulen sind in Serie geschaltet. Der Abstand der Stab-Kompensations-Spulen wird mechanisch so eingestellt, daß von diesen Spulen insgesamt ein Offset-Magnetfeld von einigen wenigen Gauß erzeugt wird. Die Pinch-Spulen und

die Pinch-Kompensations-Spulen sind in Serie an zwei ebenfalls in Serie geschaltete Netzgeräte angeschlossen. Um das Offset-Magnetfeld und damit die Form des Fallenpotentials während des Ablaufs des Experiments verändern zu können, kann ein Teil des Stromes an der Pinchkompensations-Spule durch einen rechnergesteuerten FET vorbeigeleitet werden. Während des Verdampfungskühlens muß das Offset-Feld klein sein, das heißt fast der gesamte Strom muß durch die Kompensationsspulen fließen. Dazu wird der FET in den hochohmigen Zustand versetzt. Das Offset-Magnetfeld kann dann durch den veränderbaren Widerstand fein eingestellt werden.

Die Magnetfelder müssen in weniger als einer Millisekunde ein und ausgeschaltet werden können. Die Netzgeräte können im Moment des Einschaltens nicht genügend Spannung liefern, um gegen die Selbstinduktivität der Spulen anzukommen. Deswegen kommt die zum Aufbau des Magnetfeldes nötige Energie aus Kondensatoren, die sich in den in Abbildung 3.4 als "Schalter" bezeichneten Geräten befinden. Desgleichen wird die Energie beim Ausschalten ebenfalls an Kondensatoren abgegeben und anschließend in Widerständen dissipiert.

Da die Stromkreise für den radialen und den axialen Einschluß unabhängig voneinander sind, ist es möglich allein den axialen Einschluß auszuschalten und das Kondensat entlang der axialen Richtung expandieren zu lassen.

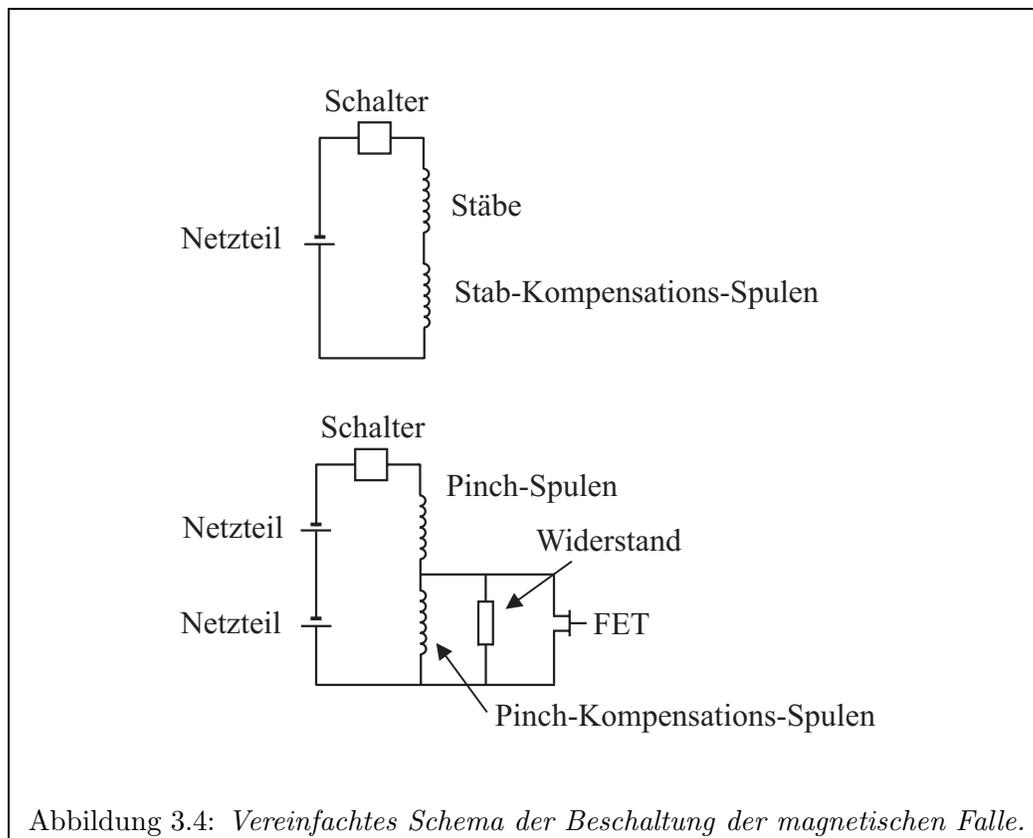


Abbildung 3.4: Vereinfachtes Schema der Beschaltung der magnetischen Falle.

Umladen in die magnetische Falle

Die Atome müssen aus der unteren MOT in die magnetische Falle umgeladen werden und das möglichst ohne Phasenraumdichte zu verlieren. Das bedeutet, daß die Atome so wenig wie möglich von einem Potentialwechsel spüren dürfen. Die zu vergleichenden Zeitskalen sind dabei die Zeit, die ein Atom zum Durchqueren der MOT benötigt und die Einschaltdauer der magnetischen Falle. Da ersteres in der Größenordnung von 10 ms liegt, wird die Falle innerhalb von weniger als 1 ms eingeschaltet.

Außerdem ist zu beachten, daß die Form des magnetischen Potentials der Größe der Atomwolke unmittelbar vor dem Umladen angepaßt ist. Ist die magnetische Falle zu flach, geht beim Umladen Dichte verloren und die Phasenraumdichte sinkt. Ist sie zu steil, wird den Atomen beim Einschalten zuviel potentielle Energie hinzugefügt und die Wolke heizt sich auf. Eine Fallenoszillationsfrequenz von 8 bis 10 Hz ist für das vorgestellte Experiment optimal [Mar97].

Drittens muß das Zentrum der MOT mit dem Zentrum der in der magnetischen Falle gespeicherten Wolke übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, erhalten die Atome zusätzliche potentielle Energie und beginnen in der Falle zu schwingen. Zu diesem Zweck werden drei orthogonale Spulen mit variabler Windungszahl in Serie mit den Quadrupolfeld-Spulen der unteren MOT geschaltet. Das Feld dieser Spulen verschiebt den Nullpunkt des MOT-Quadrupolfeldes in die Ruhelage des Massenzentrums der magnetisch gespeicherten Wolke.

Adiabatische Kompression

Nach dem Umladen der Wolke aus der MOT befinden sich typischerweise $7 \cdot 10^8$ Atome bei $50\text{ }\mu\text{K}$ in der magnetischen 10 Hz Falle. Um die Verdampfungskühlung zu begünstigen, ist es, wie in Abschnitt 2.2.1 erläutert, wichtig, eine möglichst steile Falle zu benutzen. Deswegen werden nun innerhalb von 6 Sekunden die Magnetfelder erhöht und das Offset-Feld auf etwa $1,8\text{ G}$ verringert und so die Wolke adiabatisch komprimiert. Die Falle hat nun in radialer Richtung einen Gradienten von 273 G/cm und in axialer Richtung eine Krümmung von 372 G/cm^2 . Dies entspricht Oszillationsfrequenzen von 24 Hz in axialer und 247 Hz in radialer Richtung. Die Temperatur ist durch die adiabatische Kompression auf $470\text{ }\mu\text{K}$ gestiegen.

3.4 Verdampfungskühlen

Nun kann das Verdampfungskühlen beginnen. Idealerweise müßten zur Erzeugung des magnetischen Wechselfeldes impendanzangepaßte LC-Schwingkreise verwendet werden. Es ist jedoch technisch mit erheblichem Aufwand verbunden, die Impedanzanpassung über den gesamten benötigten Frequenzbereich von 50 MHz bis 1 MHz nachzuregeln. Deswegen werden zum Erzeugen des Radiofrequenzfeldes Helmholtz-Spulen verwendet, die zwar in keinem Frequenzbereich eine gute Impedanzanpassung haben, dafür aber über den gesamten Bereich ausreichend viel abstrahlen. Jede der beiden Spulen besitzt sieben Windungen und hat die Form eines Quadrats der Kantenlänge drei Zentimeter. Die Windungszahl wurde experimentell so eingestellt, daß in dem von uns benötigtem Frequenzbereich die Abstrahlung optimal ist. Die Spulen sind senkrecht zur Fallachse, dicht an der Glasküvette montiert, so daß das Nahfeld benutzt wird. Da Spulen verwendet werden, besitzt das Nahfeld einen hohen Anteil magnetischen Wechselfeldes, genau dies ist für magnetische Übergänge nötig.

Die Radiofrequenzstrahlung wird von einem Funktionsgenerator (vom Typ HP-8116) erzeugt. Dieser wird in den VCO ("Voltage Controlled Oscillator") Betriebsmodus geschaltet und analog programmiert. Zu Beginn der Kühlung wird der Frequenzbereich 50 MHz bis 1 MHz benutzt. Werden 10 MHz unterschritten, so wird die Aussendung der Radiofrequenz für 100 ms unterbrochen und während dieser Zeit der Frequenzbereich auf 10 MHz bis $0,1\text{ MHz}$ umgeschaltet. Dadurch erhöht sich die Genauigkeit um einen Faktor zehn.

Durch das Verdampfungskühlen wird nach 21 Sekunden die Phasenraumdichte so hoch, daß sich ein Bose-Einstein-Kondensat zu bilden beginnt. Die Radiofrequenz wird auch nach dem Erzeugen des Kondensats angelassen, um neu entstehende energiereiche Teilchen schnell aus der magnetischen Falle zu entfernen.

3.5 Das Abbildungssystem

Um den Ablauf des Experimentes zu verfolgen und um Bose-Einstein-Kondensate nachzuweisen benötigt man ein gutes Abbildungssystem. Grundsätzlich kann man mit einem Abbildungssystem drei verschiedene Typen von Aufnahmen erzeugen. Der erste Typ sind Fluoreszenzaufnahmen, bei denen die zu vermessende Atomwolke mit resonantem Licht beleuchtet und das Streulicht betrachtet wird. Der zweite Typ sind Absorptionaufnahmen. Ein Nachweis-Laserstrahl der Intensität I_0 propagiert durch die Wolke mit der Dichteverteilung $n(x, y, z)$. Die Atome absorbieren Licht mit einem frequenzabhängigen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\nu)$ und schwächen so den Laserstrahl nach dem Lambert-Beer-Gesetz

$$I(x, y, \nu) = I_0 \exp\left(-\sigma(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z) dz\right) \quad (3.3)$$

ab. Absorptionsaufnahmen sind Fluoreszenzaufnahmen überlegen, denn sie haben ein besseres Signal zu Rausch Verhältnis. Durch verstimmen des Laserstrahls gegenüber der Resonanz kann man noch sehr dichte Wolken ausmessen. Ein Nachteil von Absorptionsaufnahmen ist, daß die Aufnahme mit Interferenzstreifen und räumlichen Intensitätsänderungen des Nachweisstrahls überlagert ist. Um das auszugleichen müssen die Aufnahmen immer durch eine Referenzaufnahme ohne Wolke normiert werden. Die Nachweisstrahlintensität wird so eingestellt, daß die Belichtungszeit etwa $100 \mu s$ beträgt. Dadurch werden auch frei fallende Kondensate so kurz belichtet, daß ihre Bewegung das Bild nicht verschmiert.

Die bisher besprochenen Aufnahmetypen sind destruktiv, sie zerstören das Meßobjekt durch die Wirkung von nahresonantem Licht. Der dritte Typ, die Phasenkontrastaufnahme, ist nahezu zerstörungsfrei und wird in Abschnitt 3.6 erläutert.

Ein Abbildungssystem für das Experiment muß verschiedenen, teils widersprüchlichen Anforderungen genügen.

- Es muß ein hohes Auflösungsvermögen besitzen, das heißt man benötigt optischen Zugang unter einem großen Raumwinkel und muß Linsen mit kleinen Linsenfehlern verwenden.
- Es muß eine Vorrichtung zum Wechseln der Vergrößerungsstufen, ohne Neujustage des Systems besitzen.
- Es muß für zwei verschiedene Kamerasysteme ausgelegt sein. Dies ist durch die Entstehungsgeschichte des Experimentes bedingt. Ein Kamerasystem dient zur Justage des Experiments, das zweite, hochauflösende zur Aufnahme der Meßdaten.
- Es muß höhenverstellbar sein, um die Entwicklung der Atomwolken im freien Fall über eine Strecke von über 1 cm hinweg verfolgen zu können.
- Es darf nicht zu lang sein, um andere Komponenten auf dem optischen Tisch nicht zu stören. Außerdem dürfen keine Strahlwege blockiert werden.

Die experimentelle Realisierung trägt all diesen Forderungen und Einschränkungen Rechnung (siehe Abbildung ??). Das gesamte Abbildungssystem inklusive Kamera ruht auf einer 70 cm langen, 8 cm breiten optischen Bank, die Bohrungen im selben Raster besitzt wie der optische Tisch. Die optische Bank sitzt, über Paßstifte gehalten, auf drei $2,5 \text{ cm}$ hohen Sockeln. Die Höhenverstellung wird dadurch realisiert, daß zwischen Sockel und optischer Bank Unterlegbleche mit einer Dicke zwischen 1 mm und 16 mm gelegt werden können. Das Abbildungssystem blickt unter einem horizontalen Winkel von 75° gegen die Fallachse verdreht auf das Zentrum der Falle um den maximal zugänglichen Raumwinkel auszunutzen. Dieser Raumwinkel ergibt ein maximales Auflösungsvermögen von $7 \mu m$. Auf der optischen Bank ruht im vorderen Teil eine verkürzte optische Bank, auf der die optischen Komponenten mit Ausnahme der Kamera befestigt sind.



Abbildung 3.5: Blick über das Abbildungssystem in Richtung der magnetischen Falle. Im Vordergrund ist die Kamera zu erkennen. Es sind zwei optische Bänke für verschiedene Vergrößerungsstufen gezeigt. Auf jeder Bank sind zwei Linsen und ein Bauteil für die Phasenkontrastmikroskopie zu erkennen.

Die zweite optische Bank besitzt dasselbe Lochraster und wird von den Paßstiften gehalten. Durch Austausch dieser optischen Bank läßt sich die Vergrößerung ändern. Um Linsenfehler zu vermeiden werden Achromate mit geringer sphärischer Aberration verwendet. Das optische System ist nach einem Baukasten-Prinzip aufgebaut. Je nach benötigter Vergrößerung und Auflösung können verschiedene Linsensysteme eingesetzt werden. Um ein großes Blickfeld zu haben, wird zum Beispiel eine einzelne langbrennweitige Linse verwendet. Um ein hohes Auflösungsvermögen zu erzielen, wird ein System aus zwei Linsen verwendet, so daß die erste Linse nahe an der magnetischen Falle stehen kann und so einen hohen Raumwinkel ausnutzt. Die zweite Linse bestimmt die Vergrößerung und bringt das Abbildungssystem auf die festgelegte Länge zwischen Wolke und Kamera. Die zweite Linse kann in eine Klapphalterung eingebaut werden, so daß durch hoch- und herunterklappen verschiedener Linsen die Vergrößerung gewechselt werden kann. Eine Linse jeden Abbildungssystems ist auf einen Verschiebetisch montiert um das System scharf zu stellen.

Da die Justage-Kamera nur 230 mal 230 benutzbare Pixel besitzt, sind drei Vergrößerungsstufen nötig. Die momentan benutzten sind folgende.

<i>System</i>	<i>1.Linse</i>	<i>2.Linse</i>	<i>Sichtfeld</i>	<i>Auflösung</i>	<i>Pixelabstand</i>
1	$f = 100 \text{ mm}$	–	14,4 mm	30 μm	62,5 μm
2	$f = 60 \text{ mm}$	$f = 100 \text{ mm}$	3,2 mm	13 μm	13,7 μm
3	$f = 80 \text{ mm}$	$f = 80 \text{ mm}$	0,9 mm	7,5 μm	4 μm

Die Meßkamera besitzt einen CCD-Chip mit 1024x1024 Pixeln mit 14bit Dynamik. Dadurch ist es möglich, das gesamte benötigte Sichtfeld von etwa 7 mm mit einer Auflösung von etwa 10 μm abzudecken, ohne die Vergrößerung wechseln zu müssen. Da man nur noch eine Vergrößerung benötigt, kann die Kamera an einer für diese Vergrößerung optimalen Position aufgebaut werden, wodurch erreicht wird, daß man mit einer Linse auskommt. Eine Möglichkeit ist eine $f = 100 \text{ mm}$ Linse in $2f - 2f$ Konfiguration. Das Auflösungsvermögen beträgt 10,4 μm und das Sichtfeld 7,5 mm.

Der Nachweisstrahl für die Absorptionenaufnahmen wird durch eine polarisationserhaltende Glasfaser modengereinigt. Um ihn auf unterschiedlichen Höhen ein- spiegeln zu können wurde ein Periskop konstruiert, das wie das Abbildungssystem selbst durch Unterlegbleche im Millimeterabstand höhenverstellbar ist.

3.6 Phasenkontrastmikroskopie

Sowohl Fluoreszenz als auch Absorptionenaufnahmen benützen nahresonantes Licht. Dadurch wird Impuls auf die Atome übertragen. Der damit verbundene Energieübertrag ist sehr viel größer als die Grundzustandsenergie des Kondensats. Außerdem können angeregte Atome in ein nichtgefangenes Niveau zerfallen, und so

verloren gehen (siehe Abschnitt 2.2.3). In jedem Fall wird ein Bose-Einstein-Kondensat zerstört. Das bedeutet, daß man für einen Versuch, in dem die zeitliche Entwicklung eines Kondensats untersucht werden soll, viele experimentelle Durchläufe benötigt, in denen das Kondensat jeweils zu einem leicht verschiedenen Zeitpunkt abgebildet und damit zerstört wird. Es ist allerdings niemals möglich, immer exakt die gleichen Ausgangsbedingungen zu erreichen. Das bedeutet, daß man gezwungen ist zu mitteln, was die Experimentierzeit nochmals in die Höhe treibt. Einige Experimente sind überhaupt nicht durchführbar. Ein zweites Problem, daß bei den sehr dichten kleinen Objekten, wie sie Bose-Einstein-Kondensate darstellen, auftritt, ist, daß Licht an diesen Objekten wie an einer Linse gebrochen wird. Dies stört die Absorptionsaufnahme, bei deren Auswertung vorausgesetzt wird, daß das Licht die Wolke geradlinig durchläuft [Mya97].

Die Lösung für beide Probleme ist die Phasenkontrastmikroskopie [And96]. Es wird nicht die Absorption eines Objektes nachgewiesen, sondern seine phasenverzögernde Wirkung auf eine Wellenfront. Um diese Phasenverzögerung kleiner als eine viertel Periode zu halten, muß Licht verwendet werden, dessen Verstimmung an die Dichte der Wolke angepaßt ist (siehe Abschnitt 6.3). Ist die Phasenverzögerung zu groß, beginnt das Objekt so stark als Linse zu wirken, daß Bildfehler auftreten. Durch das weitverstimmte Licht tritt keine Absorption mehr auf. Die Photonen werden elastisch an den Atomen um sehr kleine Winkel gestreut, so daß nur noch ein verschwindend geringer Impulsübertrag auftritt.

Die Phasenmodulation, die ein Objekt hervorruft, muß in eine Intensitätsmodulation übertragen werden. Eine Möglichkeit dies zu tun wäre ein Interferometer zu bauen. Viel eleganter ist es jedoch, ein Phasenkontrastmikroskop zu benutzen. In einem solchen Mikroskop wird in der Brennebene der ersten Linse der ungebeugte Anteil des Nachweisstrahls um eine viertel Wellenlänge verschoben wie in Abbildung 3.5 zu erkennen ist. Dadurch interferiert das gebeugte Licht in der Bildebene

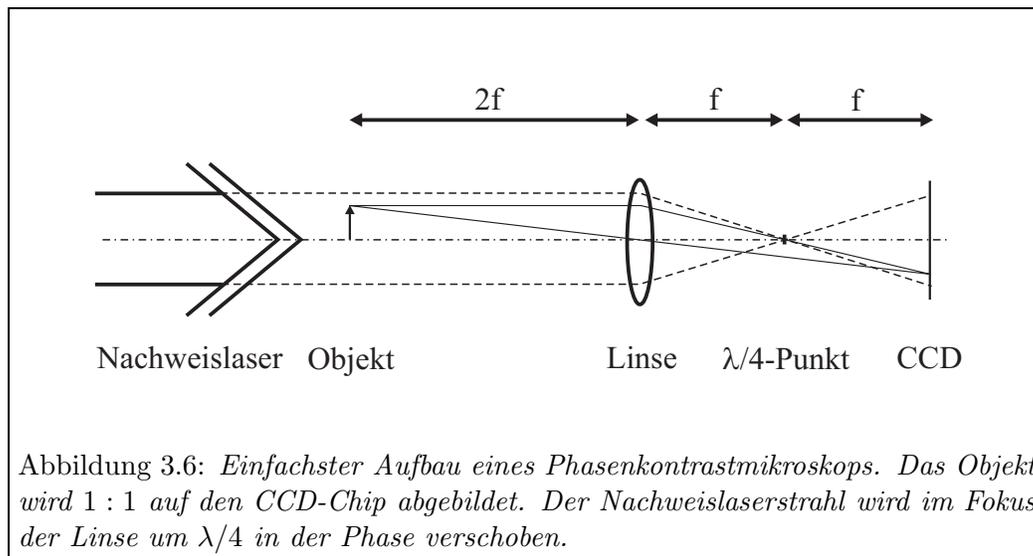


Abbildung 3.6: *Einfachster Aufbau eines Phasenkontrastmikroskops. Das Objekt wird 1 : 1 auf den CCD-Chip abgebildet. Der Nachweislaserstrahl wird im Fokus der Linse um $\lambda/4$ in der Phase verschoben.*

mit dem ungebeugten so, daß eine Phasenmodulation in eine Intensitätsmodulation umgesetzt wird und umgekehrt. Die genaue Berechnung dieses Effekts befindet sich in Anhang 6.3. Zur Verschiebung der Phasenlage des Lichts wurde ein Glassubstrat durch eine Maske mit MgF_2 bedampft. Die Phasenverschiebung einer MgF_2 Lage der Dicke d gegenüber Luft beträgt $\Delta\varphi = \frac{d}{\lambda}2\pi(n_{MgF_2} - n_{Luft})$. $n_{MgF_2} = 1,3737$ bei 780 nm und $n_{Luft} = 1,0003$. Daraus ergibt sich für eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ eine Schichtdicke von $d = 522\text{ nm}$. Die Schichtdicke wird während des Bedampfungsvorgangs durch einen mitbedampften Schwingquarz überwacht. Als Bedampfungsmaske werden dünne Metallochblenden verwendet, wie sie für Transmissionselektronenmikroskope als Halterung verwendet werden². Die MgF_2 Punkte können so mit einem Durchmesser bis hinab zu $75\text{ }\mu\text{m}$ erzeugt werden.

Bisher konnte das Phasenkontrastmikroskop noch nicht mit Bose-Einstein-Kondensaten getestet werden. Deswegen wurde ein Punkt mit einem Durchmesser von $0,6\text{ mm}$ untersucht, der die Phase des Lichtes um $\lambda/4$ verzögert. Bild 3.6 zeigt diesen Punkt in einer gewöhnlichen Mikroskopaufnahme und in einer Phasenkontrastaufnahme. Darunter ist ein Schnitt durch die Aufnahme mit der numerischen Berechnung aus Abschnitt 6.3.2 verglichen. Wie man sieht herrscht recht gute Übereinstimmung, was zur Hoffnung Anlaß gibt, daß das Phasenkontrastmikroskop auch mit Bose-Einstein-Kondensaten funktioniert.

²Die Bedampfungsmasken waren ein Weihnachtsgeschenk der Firma "Plano".

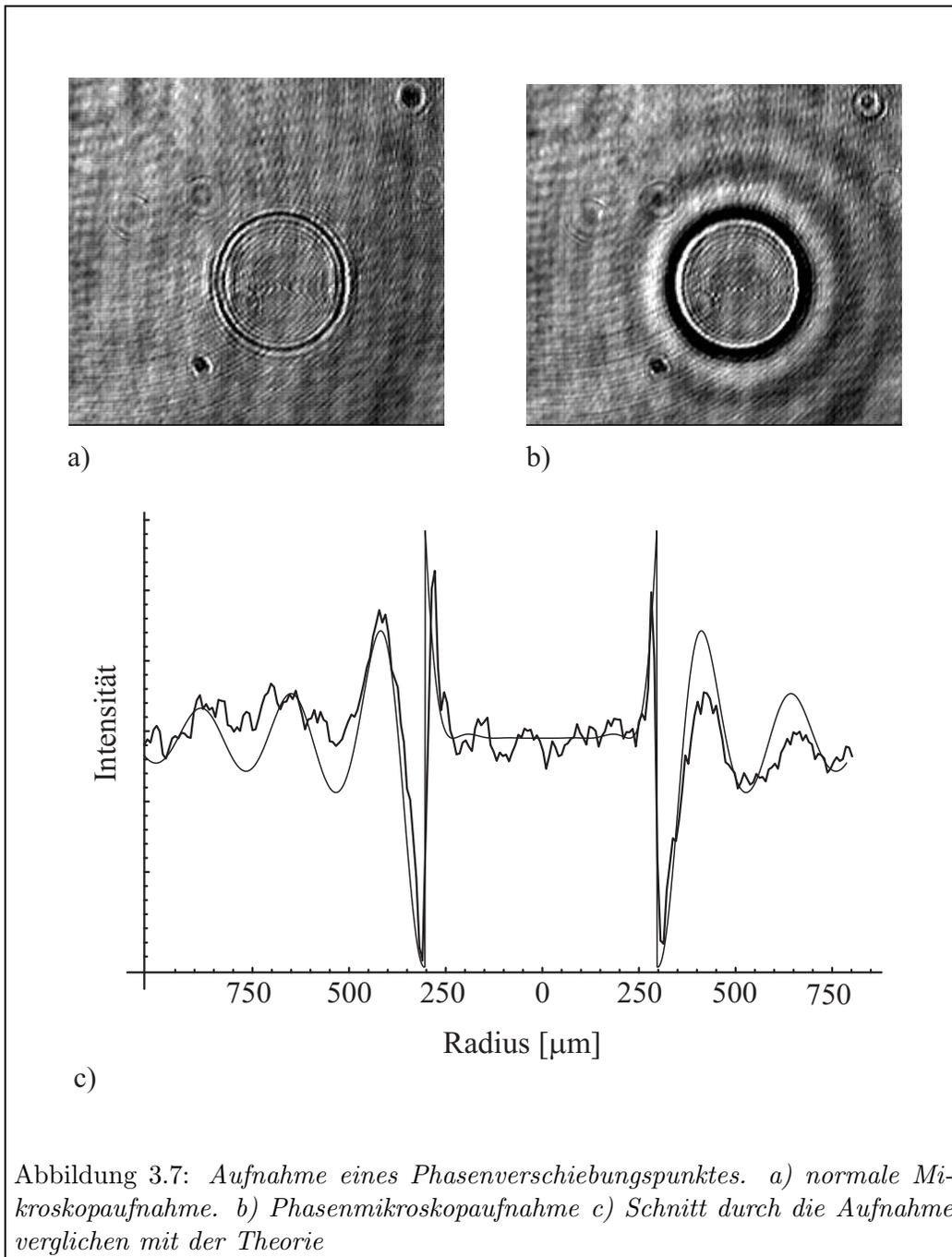


Abbildung 3.7: Aufnahme eines Phasenverschiebungspunktes. a) normale Mikroskopaufnahme. b) Phasenmikroskopaufnahme c) Schnitt durch die Aufnahme verglichen mit der Theorie

Kapitel 4

Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die experimentell gewonnenen Ergebnisse vorgestellt [Ern98]. Zunächst wird der Ablauf der Verdampfungskühlung im Experiment und in der Simulation miteinander verglichen, wodurch man eine Abschätzung für die zwei-Körper Verlustatenkonstante erhält. Anschließend werden Messungen an den Bose-Einstein-Kondensaten gezeigt und diskutiert.

4.1 Verdampfungskühlung

Die Verdampfungskühlung wurde nach dem in Abschnitt 2.2.6 beschriebenen Verfahren optimiert. Um den Ablauf der Verdampfungskühlung im Experiment mit der Simulation vergleichen zu können, müssen alle Anfangsparameter und der Verlauf der Temperatur und der Teilchenzahl während des Kühlens genau bekannt sein. Im folgenden Abschnitt wird erklärt, wie diese Messungen erfolgt sind, anschließend werden die Verdampfungskühlungsergebnisse präsentiert und interpretiert.

4.1.1 Bestimmung der Anfangsparameter

Die Parameter die in die Simulation eingehen sind die Form des Fallenpotentials, die Anfangsteilchenzahl und Temperatur, die Lebensdauer durch Hintergrundgasstöße, Verlustatenkonstanten für zwei- und drei-Körperstöße und die Heizrate. Die Form des Fallenpotentials ist auch für die Berechnung weiterer thermodynamischer Größen aus den Temperatur und Teilchenzahlmessungen nötig.

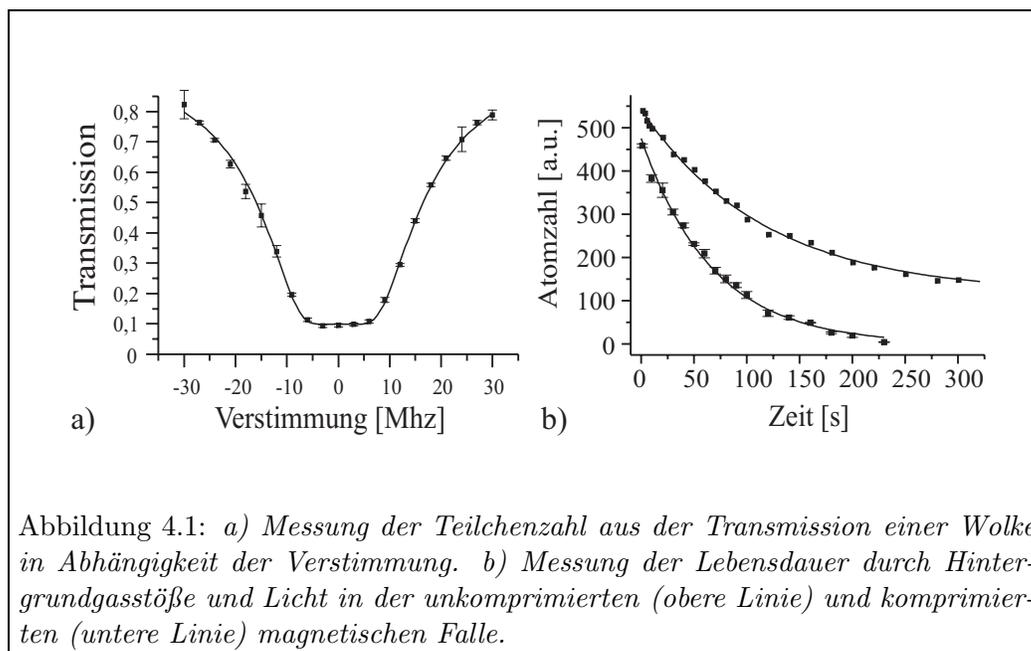


Abbildung 4.1: a) Messung der Teilchenzahl aus der Transmission einer Wolke in Abhängigkeit der Verstimmung. b) Messung der Lebensdauer durch Hintergrundgasstöße und Licht in der unkomprimierten (obere Linie) und komprimierten (untere Linie) magnetischen Falle.

Teilchenzahl

Um die Teilchenzahl zu bestimmen werden zwei Verfahren verwendet. Das erste besteht darin, Absorptionenaufnahmen der Atomwolke bei unterschiedlichen Verstimmungen des Nachweis-Laserstrahls aufzunehmen. Aus dem Verlauf der Absorption des Wolkenzentrums mit der Verstimmung läßt sich unter Kenntnis der Ausdehnung der Atomwolke die Teilchenzahl bestimmen (siehe [Mar97]). In Abbildung 4.1 ist eine solche Messung gezeigt. Wird der Nachweisstrahl nicht verstimmt, ist die Wolke optisch dicht. Mit zunehmender Verstimmung wird die Wolke durchlässiger. Dieses Verfahren ist genau, benötigt aber für jeden Meßpunkt mindestens einen experimentellen Durchlauf und ist deswegen zeitaufwendig. Es kann aber benutzt werden um ein zweites, schnelles Verfahren zu eichen, daß nur die relative Teilchenzahl ermitteln kann. Dieses zweite Verfahren funktioniert folgendermaßen. Die Atome befinden sich in der magnetischen Falle alle im $5S_{1/2} F = 2$ Zustand. Nun wird die Falle ausgeschaltet und Licht auf dem Übergang von $5S_{1/2} F = 2$ nach $5P_{3/2} F = 3$ eingestrahlt. Dies ist das MOT-Fallenlicht. Wird kein Rückpumplicht eingestrahlt, so wird jedes Atom nach einigen Absorptions-, Emissions-Zyklen in den $5S_{1/2} F = 1$ Zustand fallen und keine weiteren Photonen streuen. Alle Atome streuen so im Mittel dieselbe Anzahl Photonen in jeden Raumwinkelbereich. Ein Photomultiplier detektiert die zu ihm gestreuten Photonen. Das Integral über diesen Photonenfluß ist proportional zur Zahl der Atome in der Falle, da bei dieser Methode im Gegensatz zu Fluoreszenzmessungen an der MOT im Dauerbetrieb die optische Dichte der Wolke keine Rolle spielt.

Für die folgenden Messungen der Verdampfungskühlung beträgt die mit dem ersten Verfahren bestimmte Anfangsteilchenzahl $6,5 \cdot 10^8$ Teilchen. Die Teilchenzahl im

Verlauf der Verdampfungskühlung wurde mit dem zweiten Verfahren bestimmt.

Temperatur

Die Temperatur der Wolke wird aus der Halbwertsbreite nach freier Expansion bestimmt, wie es in Abschnitt 2.1.7 erklärt ist (siehe auch [Kun97]). Eine zweite Möglichkeit bildet das in Abschnitt 6.2 erklärte Verfahren, bei dem die Temperatur aus der Ausdehnung der Wolke in der magnetischen Falle bestimmt wird. Die Anfangstemperatur für das Verdampfungskühlen beträgt $470 \mu K$.

Fallenpotential

Die Parameter des Fallenpotentials in Gleichung (2.48) können aus den Oszillationsfrequenzen eines Atoms in der Falle in radialer und axialer Richtung und dem Offset-Magnetfeld bestimmt werden (siehe [Mar97]).

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Oszillationsfrequenzen zu bestimmen. Die langsame Oszillation in axialer Richtung wurde dadurch gemessen, daß eine Atomwolke absichtlich um etwa einen Millimeter versetzt in die magnetische Falle geladen wurde. Dadurch führt die Wolke Schwingungen mit der Eigenfrequenz des Potentials aus. Diese Bewegung ist aufgrund der Harmonizität des Potentials und der geringen Stoßzeiten sehr schwach gedämpft. Typischerweise oszilliert die Wolke einige Sekunden. Nach einer definierten Zeit wird die Wolke auf einen CCD-Chip abgebildet und der Ort des Schwerpunkts in axialer Richtung bestimmt. Durch eine Serie solcher Messungen mit unterschiedlicher Wartezeit kann man die Bewegung der Wolke verfolgen. Durch anpassen einer Sinusfunktion erhält man als axiale Oszillationsfrequenz $24 \pm 0,3 \text{ Hz}$ (siehe Abbildung 4.2 a). Die radiale Oszillationsfrequenz ist viel höher und läßt sich deswegen besser mit einem anderen Verfahren bestimmen. Dieses beruht auf der Resonanzanregung der Schwingung. Um in den harmonischen Bereich des Potentials zu gelangen, wird eine Atomwolke durch Verdampfungskühlen auf wenige μK abgekühlt. Anschließend wird das Fallenpotential für eine Sekunde mit einer Frequenz ν moduliert, während die Radiofrequenz auf einem festen Wert eingefroren wird. Die Modulation erfolgt durch Erzeugung eines Wechsellmagnetfeldes mit Hilfe einer zusätzlichen Spule, die in der Nähe der Falle plaziert wird. Das von dieser Spule erzeugte Feld oszilliert in der radialen Ebene der magnetischen Falle und verschiebt daher den Nullpunkt des $2D$ -Quadrupolfeldes. Falls ν in der Nähe der Oszillationsfrequenz oder deren Harmonischen liegt, werden die Atome durch Resonanzanregung stark geheizt. Da die Radiofrequenz die ganze Zeit über eingestrahlt wird, verwandelt man, durch Entfernen der energiereichen Atome, diesen Heizprozeß in einen Verlustprozeß. Der Verlust wird durch eine Teilchenzahlmessung nachgewiesen. Dieses Verfahren ergibt einen Einbruch der Teilchenzahl bei $247 \pm 1,5 \text{ Hz}$ der gut durch ein Lorentz Profil angenähert werden kann, wie man es bei einer Resonanz erwartet (siehe Abbildung 4.2 b). Die so ge-

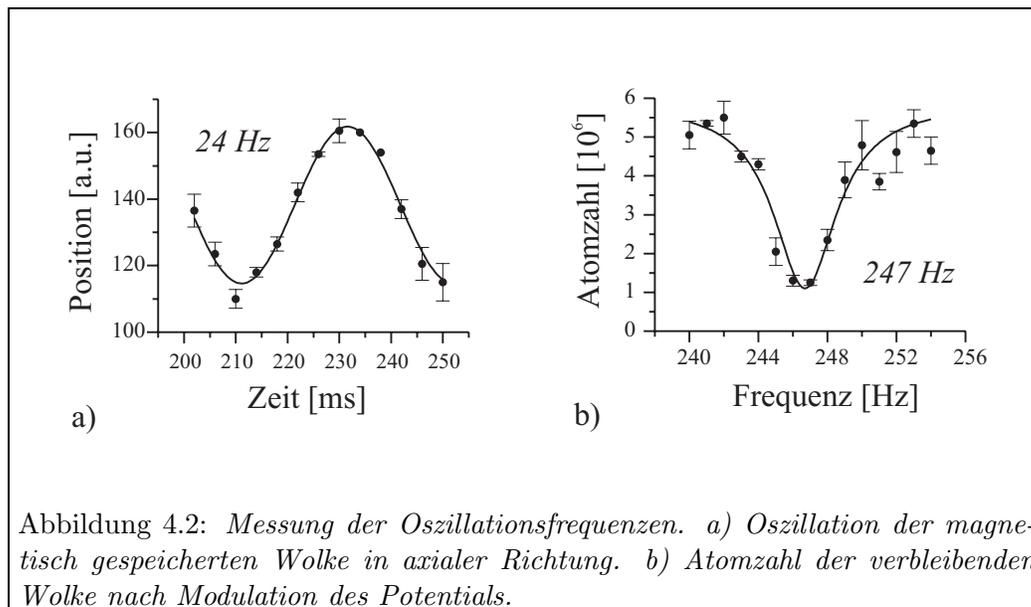


Abbildung 4.2: Messung der Oszillationsfrequenzen. a) Oszillation der magnetisch gespeicherten Wolke in axialer Richtung. b) Atomzahl der verbleibenden Wolke nach Modulation des Potentials.

messenen Fallenfrequenzen stimmen auf $\pm 1,5 \text{ Hz}$ genau mit den Fallenfrequenzen überein, wie man sie unter Kenntnis der Ströme aus der Fallengeometrie berechnet (siehe [Mar97]).

Das Offset-Magnetfeld wird bestimmt, indem man die magnetische Falle lädt und durch verdampfungskühlen die Atome aus der Falle entfernt. Ist die Endradiofrequenz niedriger gewählt als $\nu = \mu_B g_F B_{\text{Offset}}/h$, wird sich anschließend kein Atom mehr in der Falle befinden (siehe Bild 2.5). Ist sie höher, bleiben Atome gefangen. Aus der Grenzfrequenz von $1,27 \text{ MHz}$ beim Übergang zwischen diesen beiden Fällen erhält man ein Offset-Magnetfeld von $1,8 \text{ G}$.

Lebensdauern und Heizrate

Die Lebensdauer der magnetisch gespeicherten Wolke wurde in einer zyklischen Messung bestimmt, in der für jeden Datenpunkt die Falle geladen und nach einer variablen Wartezeit die Teilchenzahl bestimmt wurde. An den Verlauf der Teilchenzahl über Wartezeiten bis zu 300 s wurde eine exponentielle Zerfallskurve angepasst (siehe Abbildung 4.1 b). Daraus liest man eine Lebensdauer von $\tau = 120 \text{ s}$ für die unkomprimierte und 70 s für die komprimierte magnetische Falle ab. Zu diesen Lebensdauern tragen alle Verlustprozesse bei. Da die Dichte jedoch nicht sehr hoch ist tragen die dichteabhängigen Verluste noch nicht stark bei, so daß man annehmen darf, daß die Verluste hauptsächlich durch Stöße mit dem Hintergrundgas und Streulicht verursacht werden. Der Unterschied zwischen den beiden Lebensdauern wird hauptsächlich durch lichtinduzierte Verluste bewirkt. Da das Offset-Magnetfeld in der komprimierten Falle kleiner ist, ist die Zeeman-Verschiebung der Energieniveaus geringer und das Streulicht der Laser näher an der Resonanz. Dadurch wird ein größerer Anteil der Photonen absorbiert.

Die Verlustratenkonstante für zwei-Körperstöße wurde nicht direkt gemessen. Für sie liegt aber eine untere theoretische Abschätzung von Boesten et al. [Boe96] vor. Für ein Offset Magnetfeld von $1,8 \text{ G}$ ergibt sich für ^{87}Rb im $5S_{1/2} \ F = 2, \ m_F = 2$ Zustand eine Verlustratenkonstante von $R_2 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ bis $1 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Diese Abschätzung stellt nur eine untere Grenze dar, da nicht alle Verlustkanäle berücksichtigt wurden. Dieser Parameter ist mit der größten Unsicherheit behaftet und geht empfindlich in die Simulation ein. Durch anpassen der Simulation an die experimentellen Messwerte erhält man also einen Wert für die dipolare Verlustratenkonstante.

Die Verlustratenkonstante für drei-Körperstöße wurde von Fedichev et al. [Fed96] berechnet. Sie beträgt $R_3 = 11,7 \hbar a^4 / m = 9,38 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ und ist damit für die im Experiment vorliegenden Dichten von höchstens einigen 10^{14} cm^{-3} gegenüber der dipolaren Verlustrate vernachlässigbar klein. Für den $F = 1, \ m_F = -1$ Zustand wurde sie von Burt et al. [Bur97] gemessen.

Die Heizrate wurde experimentell von Myatt gemessen [Mya97] und beträgt etwa 600 nK/s . Da das hier vorgestellte Experiment ähnliche Daten für das Fallenpotential und die Teilchenzahl besitzt wie das dort benutzte, sollte die Heizrate vergleichbar sein. Die Heizrate macht sich erst ganz am Ende der Verdampfungskühlung bemerkbar und muß deshalb stark von diesem Wert abweichen um den unten untersuchten Bereich der Verdampfungskühlung zu beeinflussen.

4.1.2 Vergleich von Theorie und Experiment

Bis auf die dipolare Verlustratenkonstante sind alle Größen genau genug bekannt um das Experiment mit der Theorie vergleichen zu können. Im nächsten Abschnitt wird besprochen wie man diese Größe gewinnt und wie empfindlich die Simulation von den Anfangsparametern abhängt. Anschließend werden die experimentellen Daten mit der Simulation verglichen und der Verlauf des Verdampfungskühlens diskutiert.

Abhängigkeit der Simulation von den Randbedingungen

Die dipolare Verlustratenkonstante wurde durch minimieren der Größe

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(T_{sim}(t_i) - T_{exp}(t_i))^2}{\Delta T_{exp}^2} + \frac{(N_{sim}(t_i) - N_{exp}(t_i))^2}{\Delta N_{exp}^2} \right)} \quad (4.1)$$

bestimmt, welche die Abweichung der Meßwerte von der Theorie beschreibt. n bezeichnet die Anzahl der Meßwerte und $\Delta T_{exp}, \Delta N_{exp}$ die experimentellen, statistischen Fehler der Temperatur und der Teilchenzahlmessung. Die so bestimmte Verlustratenkonstante beträgt $R_2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ mit $\sigma_{min} = 1,89$. Um zu sehen

mit welcher Empfindlichkeit verschiedene Größen in die Verdampfungskühlung eingehen, wurde jeder Parameter nach oben und unten variiert, bis σ um 50% gewachsen war. Die Ergebnisse für die Anfangsteilchenzahl N_0 , die Anfangstemperatur T_0 , der Lebensdauer τ , die zwei- und drei-Körper Verlustratenkonstanten R_2 und R_3 und die Heizrate H sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. X_{min} bezeichnet den Wert einer Größe unterhalb dem σ 50% größer als σ_{min} ist. Entsprechendes gilt für X_{max} . ΔX bezeichnet die relative Änderung $\Delta X = |X_{max} - X_{opt}|/X_{opt}$ und ist ein Maß dafür wie empfindlich ein Parameter in die Verdampfungskühlung eingeht.

	$N_0[10^8]$	$T_0 [\mu K]$	$\tau[s]$	$R_2[cm^3/s]$	$R_3[cm^6/s]$	$H[\mu K/s]$
X_{min}	5,9	430	55	$4,4 \cdot 10^{-14}$	—	—
X_{opt}	6,5	470	70	$5 \cdot 10^{-14}$	$9 \cdot 10^{-30}$	0,6
X_{max}	6,9	520	90	$5,5 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-27}$	4
ΔX	6%	11%	29%	10%	22000%	560%

Die Anfangsteilchenzahl ist die Größe welche den Verlauf der Verdampfungskühlung am Stärksten beeinflusst. Die Anfangstemperatur und die dipolare Verlustratenkonstante gehen ebenfalls empfindlich ein. Da die dipolare Relaxationsrate nicht mit genügender Genauigkeit bekannt ist, mußte ihr Wert wie oben beschrieben bestimmt werden. Wie man sieht geht die drei-Körper Verlustrate in dem Dichtebereich, der im vermessenen Teil der Verdampfungskühlung liegt, nicht ein. Sie müßte um einen Faktor 220 höher sein um sich bemerkbar zu machen. Auch die Heizrate macht sich erst am Ende der Verdampfungskühlung, wenn die Temperatur klein ist, bemerkbar, so daß sie stark erhöht werden muß um σ zu ändern.

Vergleich der Meßdaten mit der Simulation

In Abbildung 4.3 werden die experimentellen Meßwerte mit der Simulation verglichen. Die Fehlerbalken sind statistische Fehler aus den vier Messungen pro Datenpunkt. Wie man sieht, stimmen Simulation und Experiment sehr gut überein. Gezeigt sind der Verlauf von Temperatur, Teilchenzahl, Peak-Phasenraumdicke, Stoßrate und Peak-Dichte. Die Temperatur nimmt von Anfangs 470 μK auf unter 1 μK ab. Die Teilchenzahl verringert sich um 2 Größenordnungen von $6,5 \cdot 10^8$ auf $1 \cdot 10^6$ in der thermischen Wolke beim Einsetzen der Kondensation. Die Peak-Phasenraumdicke steigt um 7 Größenordnungen. Wie schon im theoretischen Teil bemerkt, findet der größte Fortschritt in den letzten Sekunden statt. Warum dies so ist, erkennt man, wenn man das Wachstum der Stoßrate verfolgt. Je größer die Stoßrate, desto schneller schreitet der Verdampfungskühlungsvorgang voran und desto schneller wächst auch die Stoßrate. Man ist also im Bereich der gallopierten Verdampfungskühlung. Die Peak-Dichte steigt von $2,7 \cdot 10^{11} cm^{-3}$ auf $3 \cdot 10^{14} cm^{-3}$ im Augenblick der Kondensation. In doppellogarithmischer Darstellung sieht man

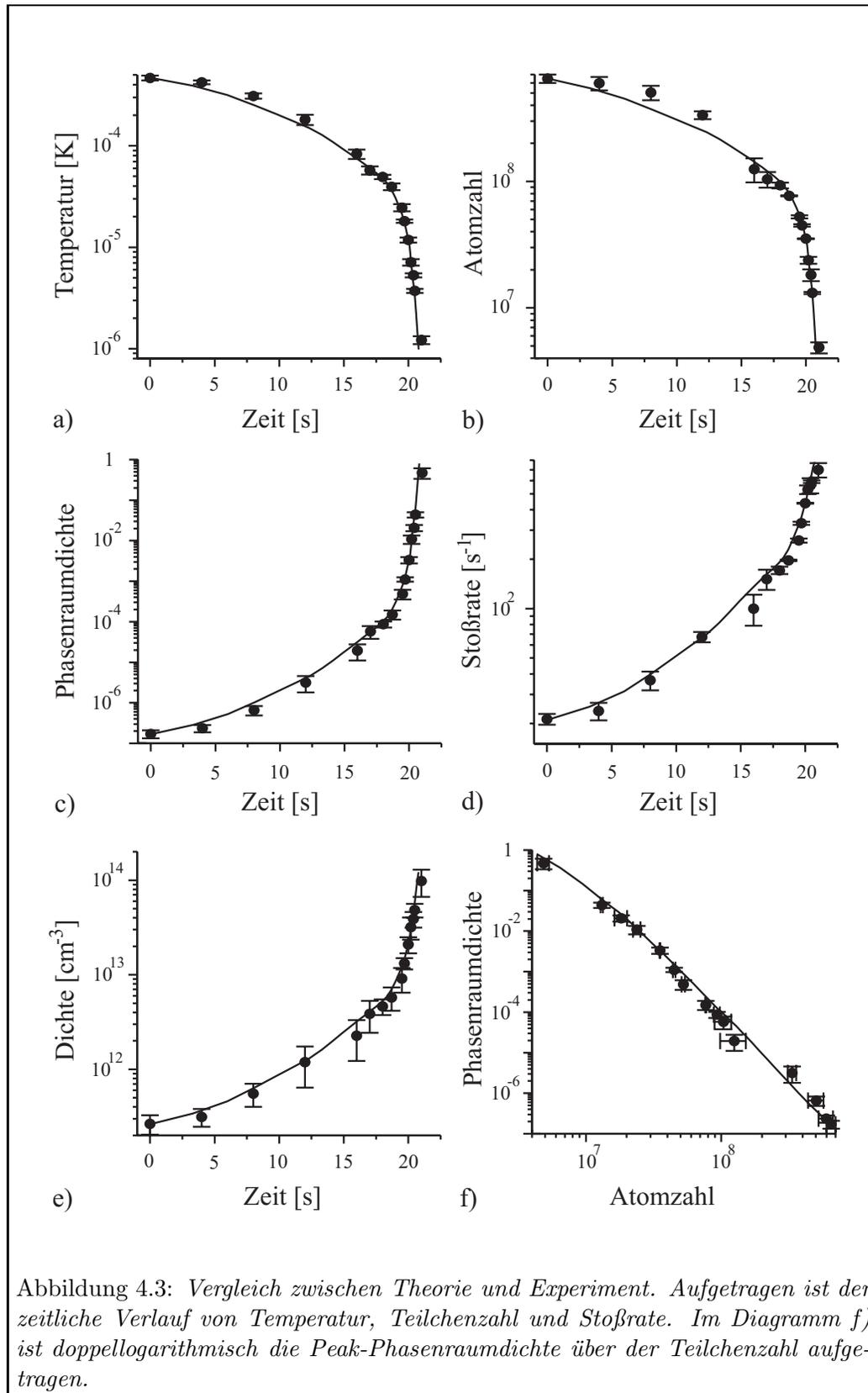
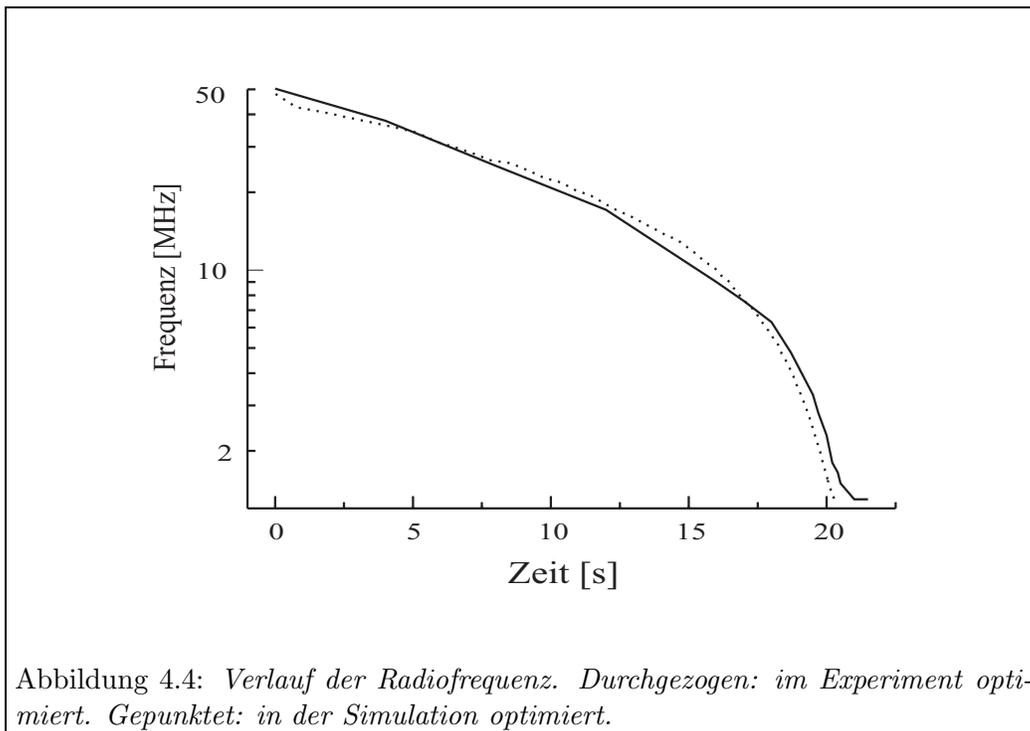


Abbildung 4.3: Vergleich zwischen Theorie und Experiment. Aufgetragen ist der zeitliche Verlauf von Temperatur, Teilchenzahl und Stoßrate. Im Diagramm f) ist doppellogarithmisch die Peak-Phasenraumdicke über der Teilchenzahl aufgetragen.

den Anstieg der Peak-Phasenraumdicke mit abnehmender Teilchenzahl als Gerade. Pro verlorener Größenordnung in der Teilchenzahl werden 3 Größenordnungen in der Phasenraumdicke gewonnen.

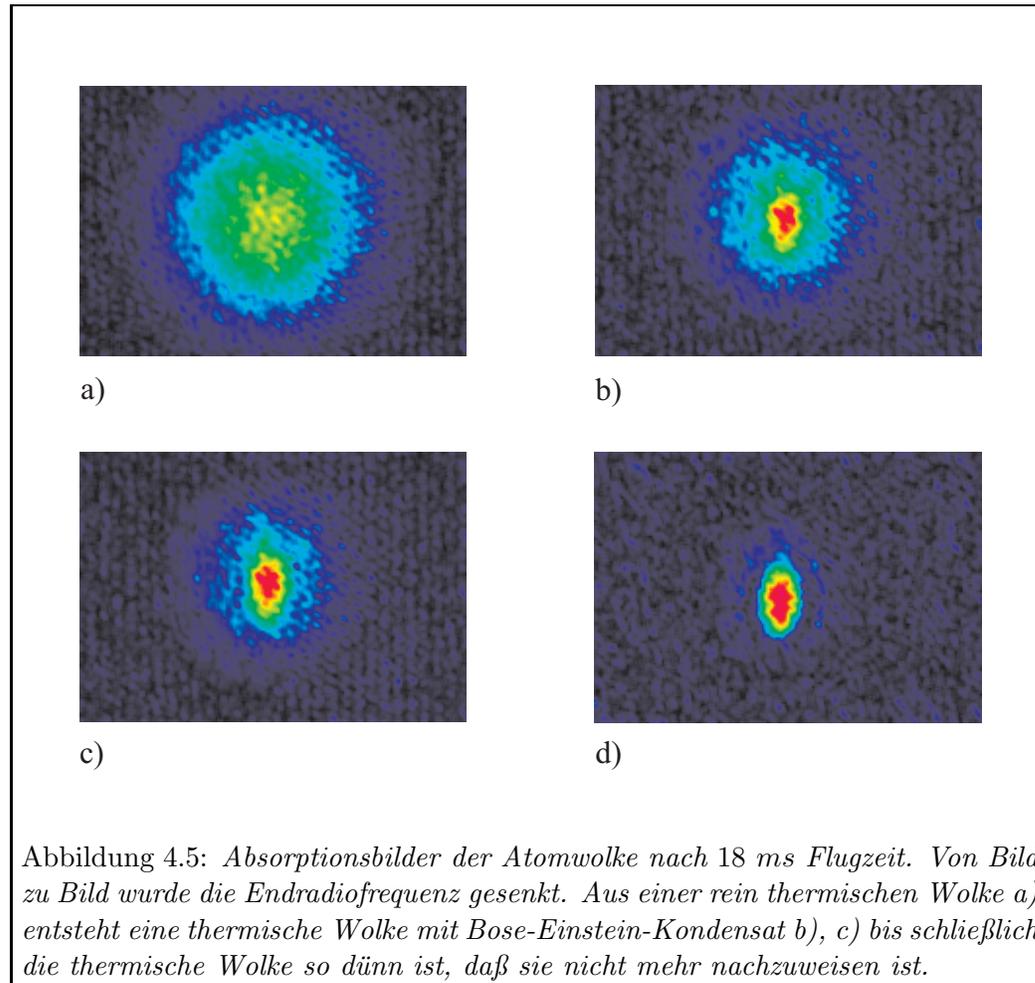
Radiofrequenzverlauf

Der Radiofrequenzverlauf wurde zunächst im Experiment auf eine möglichst hohe Peakphasenraumdicke bei gegebener Endradiofrequenz optimiert, wie in Abschnitt 2.2.6 erklärt. Mit der oben bestimmten zwei-Körper Verlustratenkonstante läßt sich die Optimierung auch in der Simulation durchführen. Dort wurde auf die Peak-Phasenraumdicke bei gegebener Endteilchenzahl optimiert. Wie man in Bild 4.4 sieht erhält man durch die beiden Optimierungsverfahren nahezu die gleichen Radiofrequenzverläufe. Sie sind in dieser Abbildung logarithmisch gezeigt, damit man den Bereich niedriger Frequenzen besser erkennen kann. Linear dargestellt ergeben sich in etwa Geraden. Die gute Übereinstimmung beweist, daß das experimentelle Optimierungsverfahren gut funktioniert. Insbesondere ist es ausreichend in jedem Optimierungsschritt die Endradiofrequenz zu halbieren, es ist nicht nötig in noch feineren Schritten vorzugehen. Nun kann man den in der Simulation optimierten Radiofrequenzverlauf im Experiment benutzen um noch bessere Ergebnisse zu erzielen. Allerdings unterscheiden sich die Teilchenzahlen beim Erreichen der Kondensation in der Simulation mit den beiden Radiofrequenzverläufen nur marginal.



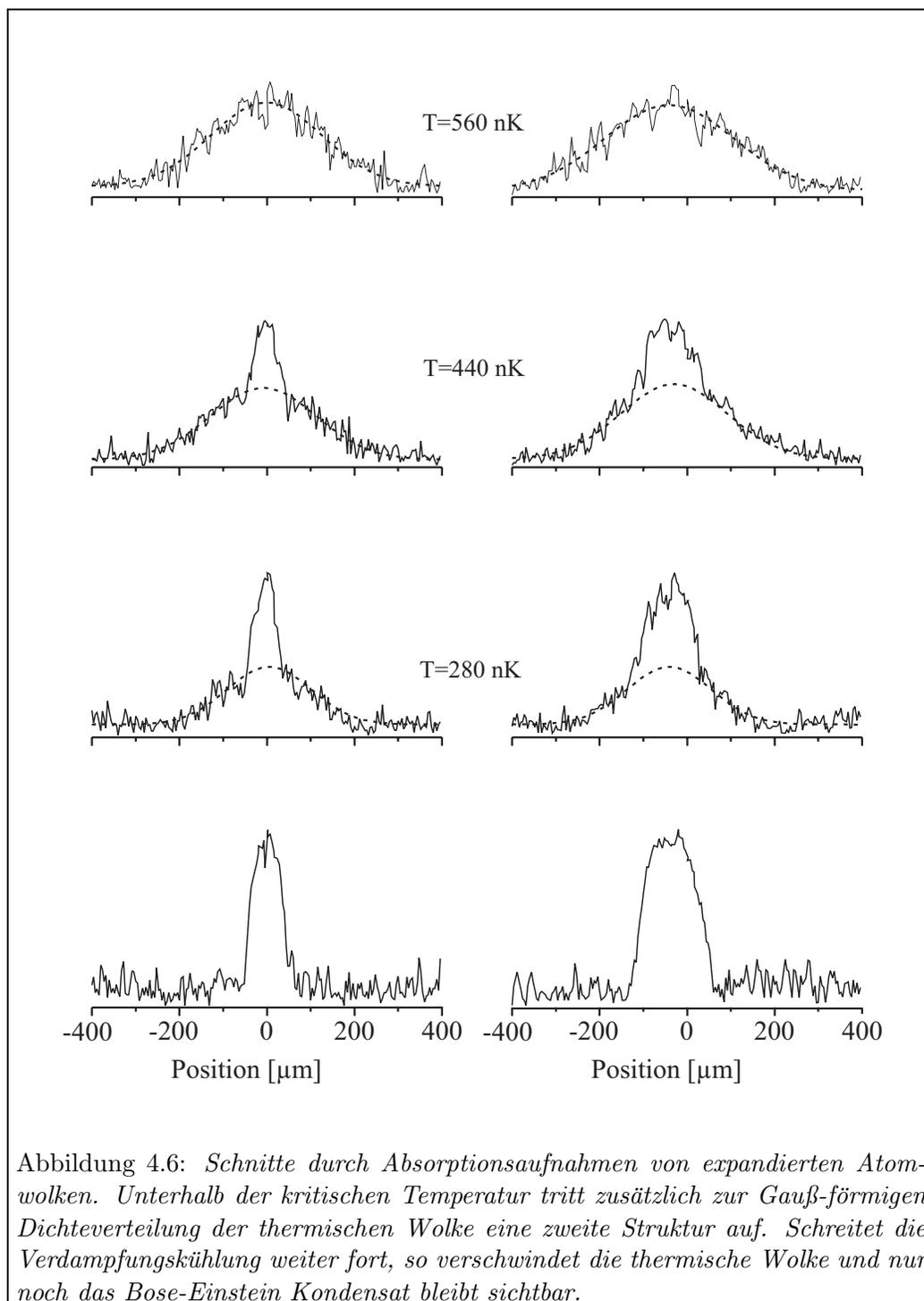
4.2 Bose-Einstein-Kondensation

Durch die Verdampfungskühlung kann schließlich die Bose-Einstein-Kondensation erreicht werden. Am Einfachsten ist ein Bose-Einstein-Kondensat, wie in Abschnitt 2.1.7 besprochen, nachzuweisen. Eine thermische Wolke ergibt eine isotrope, ein Kondensat eine anisotrope Verteilung. Falschfarbenbilder der Dichteverteilung für eine Expansionszeit von 18 ms und bei einer Verstimmung des Nachweislasers um 5 MHz von der Resonanz sind in Abbildung 4.5 zu sehen. Von Bild zu Bild

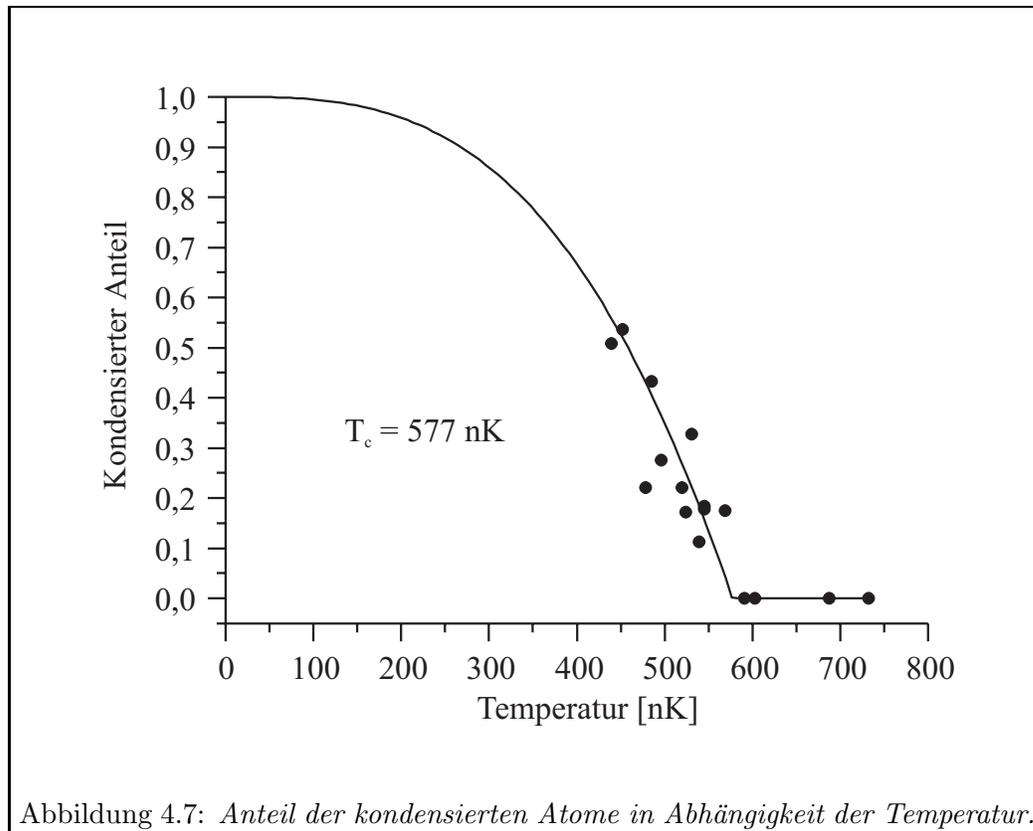


wurde die Endradiofrequenz weiter abgesenkt. Auf Bild a) ist eine thermische Wolke zu sehen, was an der rein isotropen Verteilung zu erkennen ist. Wird der Verdampfungskühlvorgang weiter fortgeführt, entsteht ein Bose-Einstein-Kondensat, daß durch seine hohe Dichte und elliptische Form hervorsteht (b, c). Ein nichtkondensierter Anteil bleibt aber noch sichtbar. Auf dem letzten Bild ist die thermische Wolke so dünn, daß sie nicht mehr nachzuweisen ist. Das Kondensat hat in der magnetischen Falle eine Zigarrenform. Die mean-field Energie beschleunigt

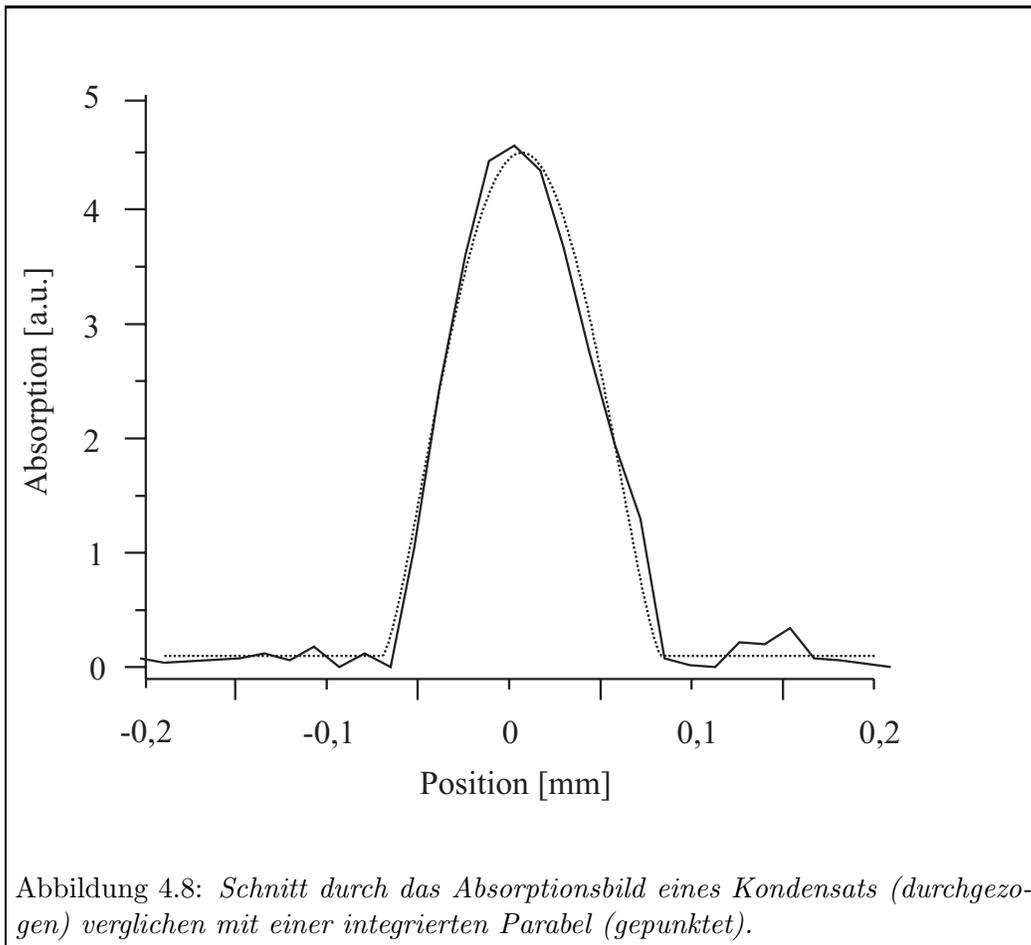
die Atome nach dem Abschalten der Falle in Richtung des starken Einschlusses, also in radialer Richtung (siehe Abschnitt 2.1.6). Dadurch entsteht eine Scheibe, die in Abbildung 4.5 von der Seite gezeigt ist.



Das plötzliche Entstehen von Bose-Einstein-Kondensaten läßt sich noch genauer an Schnitten entlang der axialen beziehungsweise radialen Richtung durch diese Bilder verfolgen, wie in Abbildung 4.6 dargestellt. Die thermische Wolke hat ein Gauß-förmiges Dichteprofil, aus dem bei Kenntnis der Expansionszeit die Temperatur abgelesen werden kann (gestrichelte Kurven). Sie ist isotrop, also sind die Schnitte in axialer und radialer Richtung gleich. Unterhalb der kritischen Temperatur taucht eine zweite Struktur, das Bose-Einstein-Kondensat, auf. Diese Struktur ist nicht Gauß-förmig und besitzt in axialer und radialer Richtung eine unterschiedliche Ausdehnung. Sinkt die Temperatur, so nimmt die Dichte des Kondensats zu, was in den Schnitten an der wachsenden zweiten Struktur erkennbar ist. Der Anteil der thermischen Wolke hingegen wird immer geringer, bis sie nicht mehr nachweisbar ist. Aus solchen Schnitten läßt sich die kritische Temperatur bestimmen. Dazu bestimmt man die Temperatur von Schnitten, auf denen gerade noch kein, oder gerade schon ein Bose-Einstein-Kondensat zu erkennen ist. Als kritische Temperatur erhält man etwa $T_c = 580 \text{ nK}$. Für Temperaturen unterhalb T_c läßt sich aus dem Verhältnis der Fläche der beiden Strukturen der Anteil der kondensierten Atome bestimmen. Aus dem Anpassen der Gleichungen (2.14) und (2.12) an die Messwerte erhält man eine noch genauere Abschätzung von $T_c = 577 \text{ nK}$. In Abbildung 4.7 sieht man, daß Theorie und Experiment sehr gut übereinstimmen.



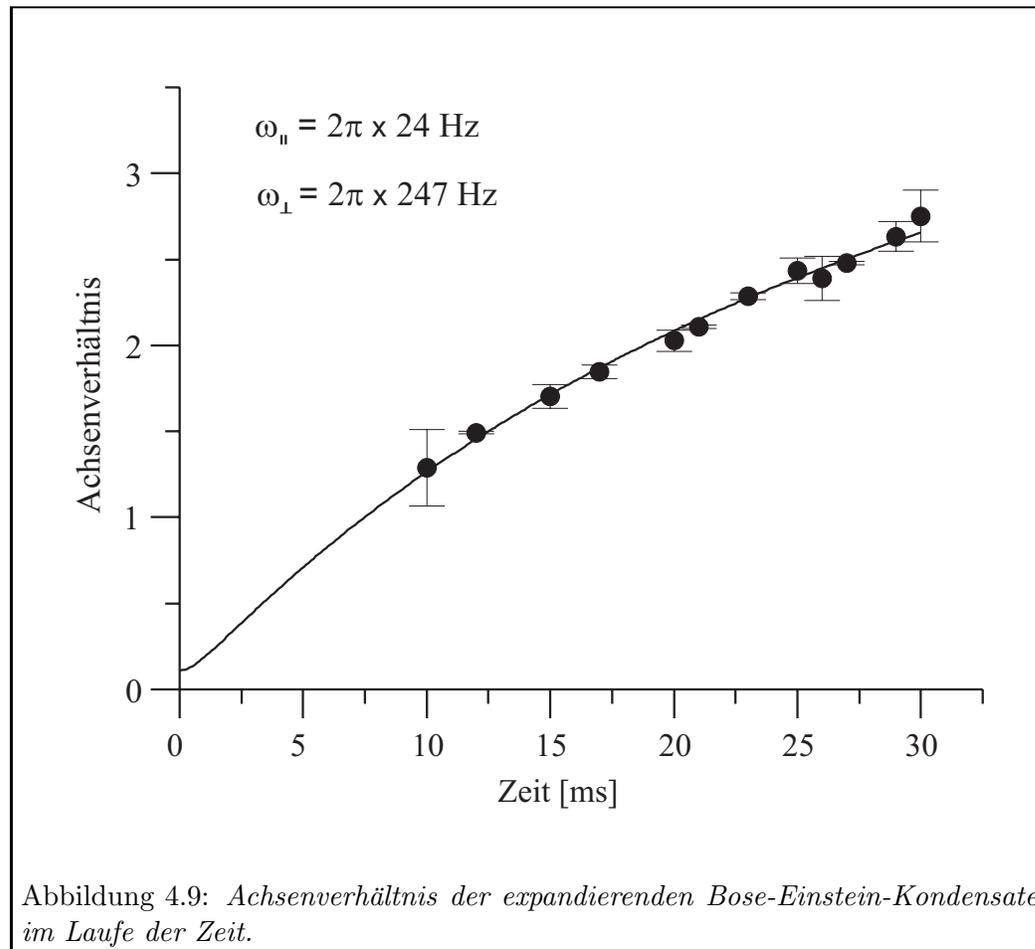
Das Dichteprofil eines Bose-Einstein-Kondensats ist, wie in Abschnitt 2.1.6 gezeigt, parabelförmig. Der Nachweislaserstrahl integriert bei der Absorptionaufnahme über diese Dichteverteilung entlang seiner Ausbreitungsrichtung ab. In Bild 4.8 wird eine solchermaßen integrierte Parabel mit dem Schnitt durch die Absorptionaufnahme eines Bose-Einstein-Kondensats verglichen. Die gute Übereinstimmung ist ein weiteres Indiz dafür, daß es sich bei den beobachteten Objekten wirklich um Bose-Einstein-Kondensate handelt. Aus der Breite des Kondensats in radialer Richtung nach einer gewissen Flugzeit läßt sich nach den Gleichungen (2.29) und (2.19) die mean-field Energie und daraus grob die Teilchenzahl im Kondensat abschätzen. Es ergeben sich etwa 10^5 Teilchen. Außerdem kann mit diesen Gleichungen auf die ursprüngliche Größe des Kondensats vor der Expansion zurückgeschlossen werden. Man erhält eine Ausdehnung von $6 \mu m$ in radialer und $60 \mu m$ in axialer Richtung.



Läßt man das Kondensat aus einer anisotropen Falle heraus frei expandieren, so wird sich das Verhältnis zwischen der Ausdehnung in axialer und radialer Richtung im Laufe der Zeit ändern, da das Kondensat in der Richtung des größeren

Einschlusses stärker beschleunigt wird. Dieses Achsenverhältnis wurde in Abschnitt 2.1.6 berechnet und ist, wie dort gezeigt wurde, allein von den Fallenfrequenzen der magnetischen Falle bestimmt. In Bild 4.9 sind die Meßergebnisse und die Vorhersagen aufgetragen. Die Fehlerbalken sind wiederum statistische Fehler. Die gute Übereinstimmung ist auch ein Indiz für die Genauigkeit der Frequenzmessungen und ein Beweis dafür, daß die Expansion der Wolke nicht zum Beispiel durch Streufelder beeinflusst wird. Dies ist für spätere Experimente wichtig.

Die Anzahl der Atome in der thermischen Wolke und im Kondensat am Phasenübergang kann auf drei Arten bestimmt werden. Aus Absorptionenaufnahmen wie oben beschrieben, aus der Simulation, wenn sie bis zum Phasenübergang fortgesetzt wird und aus Kenntnis der Fallenfrequenzen und der kritischen Temperatur mit Gleichung (2.12). Die Simulation liefert $2 \cdot 10^6$ Atome, Gleichung (2.12) $1,4 \cdot 10^6$ Atome.



Kapitel 5

Ausblick

Mit dem Experiment können nun Bose-Einstein-Kondensate erzeugt werden. Die Fortführung der Arbeit wird zum Teil darin bestehen, die Apparatur noch zuverlässiger zu machen. Doch auch jetzt sind schon Experimente möglich. Da der axiale und radiale Einschluß der magnetischen Falle unabhängig voneinander betrieben werden können, ist es möglich, nur den axialen Einschluß abzuschalten, und so einen magnetischen Wellenleiter für Bose-Einstein-Kondensate zu erzeugen. Dadurch ergeben sich viele experimentelle Möglichkeiten. Beispielsweise kann die Expansion des Kondensats in einer Richtung untersucht werden. Durch weitverteilte Lichtebenen läßt sich dieser Wellenleiter schließen und so ein Kastenpotential realisieren. Dies entspräche einem Fabry-Perot Interferometer für Kondensate.

In atomaren Gasen erzeugte Bose-Einstein-Kondensate stellen einen Zustand der Materie dar, der sich durch viele ungewöhnliche Eigenschaften auszeichnet. Eine der wichtigsten ist, daß ein Kondensat eine makroskopische Wellenfunktion darstellt. Diese Eigenschaft läßt sich wie in der Optik durch Interferenzexperimente, wie der Beugung am Doppelspalt oder Gitter untersuchen. Ein Aspekt, der dabei besonders interessiert ist, wie die Phase eines Kondensats entsteht und welche Prozesse die Kohärenz zerstören.

Bose-Einstein-Kondensate besitzen angeregte Zustände, zum Beispiel Schallwellen oder Wirbel, die durch zeitabhängige Potentiale hervorgerufen werden können. Des weiteren kann die Wechselwirkung zwischen Kondensaten untersucht werden, indem in einer Falle gleichzeitig mehrere Kondensate erzeugt werden, die sich durch ihren F -Zustand unterscheiden. Durch Mikrowellenpulse können die beiden Kondensate gemischt oder vertauscht werden.

Ein weiteres Untersuchungsgebiet bildet die Wechselwirkung von Licht mit Kondensaten. Durch die hohe Dichte erwartet man eine Verschiebung der Spektrallinien. Außerdem könnte sich das Streuverhalten von einem dichten Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat leicht ändern.

Kapitel 6

Anhang

6.1 Berechnung thermodynamischer Größen

Im Experiment können nur die Temperatur und die Teilchenzahl direkt gemessen werden. Andere thermodynamische Größen müssen berechnet werden. Ähnliches gilt für die Simulation mit der Methode abgeschnittener Boltzmann-Verteilungen. Dort wird die Temperatur und die Teilchenzahl durch Lösen von Differentialgleichungen zeitlich verfolgt, alle anderen Größen sind zunächst unbekannt. In diesem Abschnitt soll erklärt werden, wie man aus der Temperatur, der Teilchenzahl und der Abschneideenergie, die immer bekannt ist, da sie vorgegeben wird, die Peak-Dichte n_{Peak} , die Peak-Phasenraumdichte f_{Peak} , die Stoßrate γ_{el} und $\langle n^k \rangle$ berechnet. Der Ausgangspunkt dieser Rechnungen ist die Phasenraumverteilungsfunktion

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f_{Peak} \exp(-\beta H(\vec{r}, \vec{p})) \Theta(E_{cut} - H(\vec{r}, \vec{p})) \quad (6.1)$$

mit $H(\vec{r}, \vec{p}) = |\vec{p}|^2/2m + U(\vec{r})$, wobei das Potential $U(r)$ durch Gleichung (2.48) gegeben ist. Durch die Stufenfunktion Θ wird berücksichtigt, daß durch das Verdampfungskühlen keine Teilchen oberhalb der Energie E_{cut} in der Verteilung vorliegen. Normiert man diese Verteilung mit (2.42) auf die Teilchenzahl, erhält man die Peak-Phasenraumdichte

$$f_{Peak} = f(\vec{r} = 0, \vec{p} = 0) = \frac{N}{\left[6(k_B T)^4 P(4, \eta) + 4U_0(k_B T)^3 P(3, \eta)\right] \tilde{\rho}} \quad (6.2)$$

mit $\tilde{\rho} = (2m)^{3/2} \pi^3 / 2h^3 A^2 B^{1/2}$. Desweiteren ist $\eta = E_{cut}/k_B T$ und

$$P(a, \eta) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\eta t^{a-1} e^{-t} dt \quad (6.3)$$

die unvollständige Gamma Funktion mit $\Gamma(a) = P(a, \infty)$. Sie berücksichtigt die Änderung der Peak-Phasenraumdichte durch die abgeschnittene Boltzmann-Verteilung. Im Fall einer nicht abgeschnittenen Verteilung ist $\eta = \infty$ und die unvollständigen Gamma Funktionen fallen weg. Während der Verdampfungskühlung

bewegt sich η zwischen 11 und 8. In diesem Bereich sinken $P(4, \eta)$ und $P(3, \eta)$ nicht unter 0.95. Die Dichteverteilung ist

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{h^3} \int d^3p f(\vec{r}, \vec{p}) = f_{Peak} \lambda^{-3} \exp(-\beta U(\vec{r})) P(3/2, \eta(\vec{r})) \quad (6.4)$$

mit $\eta(\vec{r}) = (E_{cut} - U(\vec{r})) / (k_b T)$. Die Peak-Dichte ist

$$n_{Peak} = n(0) = f_{Peak} \lambda^{-3} P(3/2, \eta) \quad (6.5)$$

und für nichtabgeschnittene Boltzmann-Verteilungen erhält man daraus

$$f_{Peak} = n_{Peak} \lambda^3 \quad (6.6)$$

wie in Abschnitt 2.1.1 angekündigt.

Die elastische Stoßrate beträgt für ein Teilchen mit Streuquerschnitt σ , auf das ein Gasstrom der Geschwindigkeit v und der Dichte n einströmt, $\gamma_{el} = \sigma v n$. In einem inhomogenen Gas gilt diese Gleichung nur noch lokal für die relative Geschwindigkeit zweier Geschwindigkeitskomponenten. Um die Gesamtstoßrate, das heißt die mittlere Anzahl der Stöße pro Teilchen und pro Zeit, zu erhalten, muß über das ganze Volumen und alle Geschwindigkeitskomponenten für die beiden Stoßpartner aufintegriert werden

$$\gamma_{el} = \frac{1}{h^3} \int d^3p_1 \frac{1}{h^3} \int d^3p_2 \int d^3r \sigma \frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|}{m} n(\vec{r}) \frac{1}{N} f(\vec{r}, \vec{p}_1) \frac{1}{N} f(\vec{r}, \vec{p}_2). \quad (6.7)$$

Die Phasenraumverteilungsfunktionen werden hier als Wahrscheinlichkeitsverteilung verwendet und müssen deswegen auf 1 normiert werden. Der Einfachheit halber wird mit nichtabgeschnittenen Boltzmann-Verteilungen weitergerechnet. Unter Verwendung der Substitutionen $\vec{P} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2$ und $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ läßt sich mit $d^3p_1 d^3p_2 = d^3P d^3q$ das Integral umformen zu $\gamma_{el} = \sqrt{2} \sigma \langle v \rangle \langle n^2 \rangle / N$. Wobei $\langle n^2 \rangle / N = \int d^3r n(\vec{r})^2 / N$ die dichtegemittelte Dichte und $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\langle v \rangle = \frac{1}{h^3} \int d^3p d^3r \frac{|\vec{p}|}{m} \frac{1}{N} f(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}. \quad (6.8)$$

Den Term $\langle n^2 \rangle$ erhält man aus der Peak-Dichte $n_{Peak}(T)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \langle n^k \rangle &= \int d^3r n(\vec{r})^k = n_{Peak}(T)^k \int d^3r \exp(-k\beta U(\vec{r})) \\ &= n_{Peak}(T)^k N / n_{Peak}(T/k). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Damit werden die Terme $\langle n^k \rangle$ in den Verlustaten (2.57) berechnet.

6.2 Herleitung der T, N Messung

Für die Optimierung des Radiofrequenzverlaufs ist es wichtig, über ein schnelles Verfahren zur Bestimmung der Temperatur und der Teilchenzahl auch großer Wolken zu verfügen. Das hier vorgestellte Verfahren wertet eine Absorptionaufnahme

der Wolke aus, die direkt nach dem Abschalten der magnetischen Falle aufgenommen wurde. Zu diesem Zeitpunkt erfahren die Atome keine Zeeman-Verschiebung durch das Fallenmagnetfeld mehr, die Form der Wolke hat sich aber noch nicht wesentlich verändert. Aus einem Schnitt durch diese Aufnahme, oder einer Summe von parallelen Schnitten läßt sich die Temperatur und die Teilchenzahl bestimmen. Ausgangspunkt ist das Absorptionsgesetz (3.3). Als Dichte setzt man eine Boltzmann-Verteilung an $n(\vec{r}) = n_{Peak} \exp(-\beta U(\vec{r}))$ mit einem Potential $U(\vec{r})$ nach Gleichung (2.48). Die Peak-Dichte erhält man aus (6.6). Mit diesen Größen berechnet man das Integral aus dem Absorptionsgesetz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} n(r) dr &= 2n_{Peak} \exp(\beta U_0) \int_0^{\infty} dy e^{(-\beta \sqrt{A^2(x^2+y^2)+(U_0+Bz^2)^2})} \\ &= 2n_{Peak} \exp(\beta U_0) \int_0^{\infty} dy e^{(-\beta \sqrt{A^2 y^2 + C})}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

wobei $C = A^2 x^2 + (U_0 + Bz^2)^2$ ist. Durch die Substitution $s^2 = A^2 y^2 + C$ erhält man ein Integral, daß in [Gra80] nachgeschlagen werden kann. Als Lösung ergibt sich die Bessel- K_1 Funktion. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \exp\left(-\sigma(\nu) \frac{2n_{Peak}}{A} \exp(\beta U_0) HK_1(\beta H)\right) \quad (6.11) \\ \text{mit } H &= \sqrt{A^2 x^2 + U_0^2 + 2U_0 B z^2 + B^2 z^4}. \end{aligned}$$

Diese Funktion kann an Schnitte durch Absortionsaufnahmen angepaßt werden. Daraus erhält man die Temperatur und die Teilchenzahl.

6.3 Theorie des Phasenkontrastmikroskops

Im Folgenden wird erklärt wie ein Phasenkontrastmikroskop funktioniert. Dazu wird das Abbildungsverhalten zunächst analytisch näherungsweise berechnet. Um Vergleiche mit dem Experiment anstellen zu können ist jedoch eine genauere numerische Beschreibung notwendig.

6.3.1 Analytische Rechnung

Zur Vereinfachung wird das Phasenkontrastmikroskop nur eindimensional betrachtet. Zunächst wird die Fouriertransformationseigenschaft einer Linse untersucht. Das Licht in der Urbildebene sei mit $p(x)$ phasenmoduliert, wobei x die Richtung senkrecht zur optischen Achse bezeichnet. Die Amplitude beträgt $f(x) = \exp(ip(x))$. Außerdem wird angenommen, daß das Urbild periodisch mit der Periode a ist. Dieses Lichtfeld wird als aus ebenen Wellen $\exp(2\pi i x n/a)$ zusammengesetzt betrachtet

$$f(x) = \sum_n \widetilde{f}_n e^{2\pi i \frac{n}{a} x}, \quad (6.12)$$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) e^{-2\pi i \frac{n}{a} x}. \quad (6.13)$$

\tilde{f}_n ist die Fouriertransformierte von $f(x)$. Jede ebene Welle wird in der Brennebene

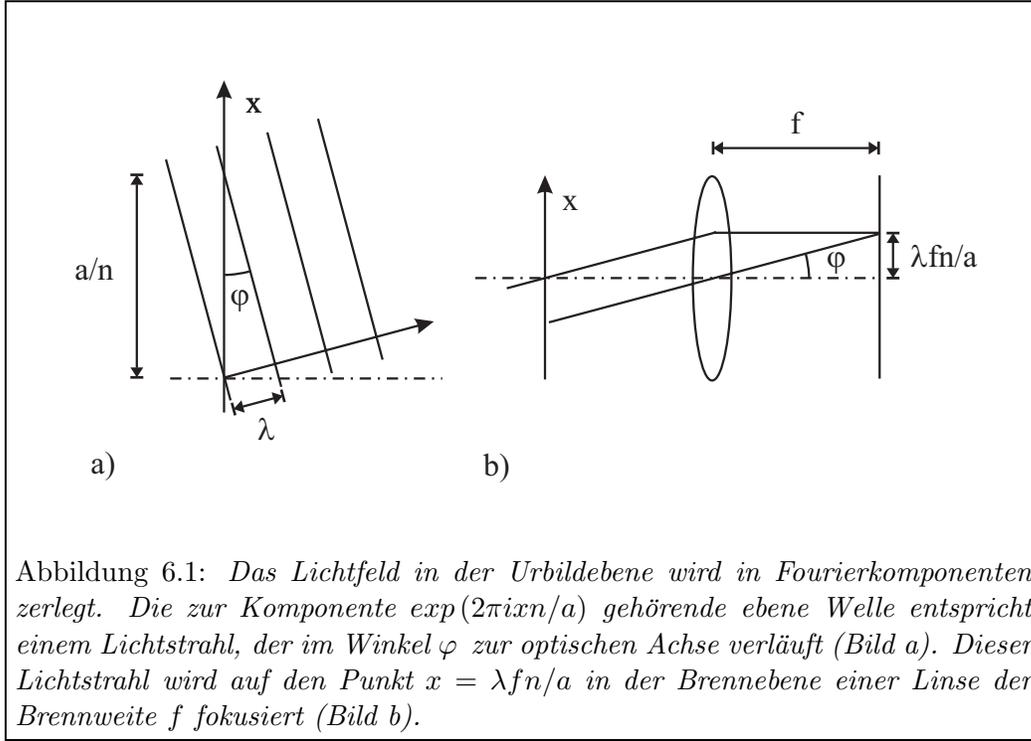


Abbildung 6.1: Das Lichtfeld in der Urbildebene wird in Fourierkomponenten zerlegt. Die zur Komponente $\exp(2\pi i x n/a)$ gehörende ebene Welle entspricht einem Lichtstrahl, der im Winkel φ zur optischen Achse verläuft (Bild a). Dieser Lichtstrahl wird auf den Punkt $x = \lambda f n/a$ in der Brennebene einer Linse der Brennweite f fokussiert (Bild b).

der ersten Linse des Abbildungssystems auf den Punkt $y = f \lambda n/a$ fokussiert, wie man an Abbildung 6.1 ablesen kann. Insbesondere wird die ebene Welle mit $n = 0$, die dem beleuchtenden Laserstrahl entspricht, bei $y = 0$ auf der Strahlachse fokussiert. In einem Phasenkontrastmikroskop wird diese Komponente um $\pi/2$ in der Phase verschoben. Um allgemeinere Aussagen treffen zu können, wird mit einer Phasenverschiebung von $\Delta\varphi$ und einer Transmission t weitergerechnet. In der Bildebene der ersten Linse wird das Lichtfeld wieder rekonstruiert. Nur die Komponente mit $k = 0$ wurde verändert

$$\hat{f}(x) = f(x) + \tilde{f}_0 (te^{i\Delta\varphi} - 1), \quad (6.14)$$

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{ip(x)} \approx 1. \quad (6.15)$$

Dabei wurde in der Berechnung von f_0 angenommen, daß $p(x)$ fast überall nahe 0 ist. Der CCD-Sensor nimmt die Intensität

$$\begin{aligned} I(x) &= \left| \hat{f}(x) \right|^2 = \left| e^{ip(x)} + (te^{i\Delta\varphi} - 1) \right|^2 \\ &= 2 + t^2 - 2t \cos(\Delta\varphi) + 2t \cos(p(x) - \Delta\varphi) - 2 \cos(p(x)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

dieses Lichtfeldes war. Dieses Ergebnis wird nun auf verschiedene Fälle spezialisiert und diskutiert. Der erste Fall ist derjenige der Dunkelfeldmikroskopie mit $t = 0$: Die nullte Ordnung wird in der Fourier-Ebene einfach ausgeblendet. Daraus ergibt sich die Intensitätsverteilung

$$I_{Dunkelfeld}(x) = 2 - 2 \cos(p(x)). \quad (6.17)$$

Wie man sieht wird die Phasenverschiebung in eine Amplitudenvariation umgesetzt. Die Intensität hängt für kleine Phasenverschiebungen jedoch quadratisch von der Phasenverschiebung ab, was das Verfahren unbequem für quantitative Messungen macht.

Der zweite Fall ist der der Phasenkontrastmikroskopie mit variabler Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ der nullten Ordnung ohne Intensitätsabschwächung, also $t = 1$. Die Intensitätsverteilung ist

$$I(x) = 3 - 2 \cos(\Delta\varphi) - 4 \sin\left(p(x) - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (6.18)$$

Der Kontrast hängt mit $\sin(-\Delta\varphi/2)$ von der Phasenverschiebung ab, er wäre für $\Delta\varphi = \pi$ maximal. Dann ist die Intensität jedoch wieder quadratisch von der Phasenverschiebung abhängig, so daß gegenüber dem Dunkelfeldmikroskop nichts gewonnen wäre. Für $\Delta\varphi = 0$ wäre das Verhalten über den größten Bereich linear, aber der Kontrast ist null, denn dies ist der Fall eines gewöhnlichen Mikroskops. $\Delta\varphi = \pi/2$, die in einem Phasenkontrastmikroskop benutzte Einstellung, stellt also einen Kompromiß zwischen der Anforderung an Linearität und hohem Kontrast dar. Wie man sieht ist es nicht tragisch, wenn die Phase nicht um exakt $\pi/2$ verschoben wird, das Phasenkontrastmikroskop funktioniert immer noch. Die Intensitätsverteilung des Phasenkontrastmikroskops ist also

$$I_{Phasenkontrast}(x) = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin\left(p(x) - \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.19)$$

6.3.2 Numerische Rechnung

Bei dieser analytischen Berechnung des Verhaltens eines Phasenkontrastmikroskops wurde angenommen, daß wirklich nur die zum Beleuchtungsstrahl gehörende Komponente in ihrer Phase verschoben wird. In Wirklichkeit hat ein zur Phasenverschiebung benutztes optisches Bauteil eine endliche Ausdehnung. Dies ist auch nötig, da der Fokus des Beleuchtungsstrahls eine endliche Breite hat. Das bedeutet, daß auch ebene Wellen, die ihren Fokus dicht neben dem Fokus des Beleuchtungsstrahls haben, mitverzögert werden. Diese Wellen entsprechen langwelligen Strukturen im Ausgangsbild. Um die so hervorgerufenen Bildstörungen zu berechnen, muß die oben beschriebene Rechnung numerisch durchgeführt werden. Dazu wird das Urbild diskretisiert: $f_x = f(xl)$. l ist dabei das Längenintervall, mit dem das Urbild

abgetastet wird. Daraus ergibt sich die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f_x e^{2\pi i(xl)(\frac{s}{nl})}. \quad (6.20)$$

Der Wellenvektor $k = s/nl$ wird, wie oben berechnet, in der Fourierebene auf $y = \lambda f k$ fokussiert. Bei einem Radius des phasenverschiebenden Bauteils von r wird \tilde{f}_s also bis $s = rnl/\lambda f$ verschoben. Mit den solchermaßen veränderten \tilde{f}_s berechnet man die Rücktransformierte

$$\hat{f}_x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} \tilde{f}_s e^{-2\pi i x \frac{s}{n}}. \quad (6.21)$$

Nun soll berechnet werden, was auf einem Phasenkontrastbild eines in der magnetischen Falle gefangenen Bose-Einstein-Kondensats mit umgebender thermischer Wolke zu sehen ist. Dazu muß das Dichteprofil des Bose-Einstein-Kondensats und der thermischen Wolke berechnet werden und der komplexe Wirkungsquerschnitt für Photonenstreuung an Rubidium bekannt sein. Das dreidimensionale Dichteprofil eines Bose-Einstein-Kondensats ist gegeben durch Gleichung (2.17). Der Nachweislaserstrahl integriert entlang seiner Achse über diese Verteilung auf. Mit einem harmonischen Potential der Form

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m \left((x^2 + y^2) \omega_{\perp}^2 + z^2 \omega_{\parallel}^2 \right) \quad (6.22)$$

erhält man daraus folgende zweidimensionale Dichteverteilung:

$$D(y, z) = \frac{2}{3} \frac{m \omega_{\perp}^2}{Ng} \left(\frac{2\mu}{m \omega_{\perp}^2} - y^2 - \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega_{\perp}^2} z^2 \right)^{3/2}. \quad (6.23)$$

Das chemische Potential μ erhält man nach Gleichung 2.20 aus der Normierung der Wellenfunktion und $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ wobei a der s-Wellen Streuquerschnitt ist. Diese Dichteverteilung ist auf 1 normiert, also muß sie noch mit der Teilchenzahl N multipliziert werden. Die entlang des Laserstrahls aufintegrierte Dichteverteilung einer thermischen Wolke ist gegeben durch Gleichung (6.10).

Der komplexe Wirkungsquerschnitt für Photonenstreuung eines Atoms mit der Resonanzfrequenz ν_0 , der Linienbreite $\Delta\nu$, einem Faktor f , der aus dem Dipolmatrixelement des Übergangs stammt, bei der Frequenz ν ist gegeben durch [Sal91]

$$\sigma = f \frac{i\lambda^3 \Delta\nu}{2\pi c} \frac{\nu_0^2}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu \Delta\nu}, \quad (6.24)$$

wobei $\lambda = c/\nu_0$ ist. Die Amplitude einer einlaufenden Welle wird mit $\exp(-\sigma n/2)$ abgeschwächt und phasenverschoben. Aus der Peak-Dichte und der Forderung, daß die Phasenverschiebung weniger als $\lambda/4$ sein soll, läßt sich berechnen, daß die Verstimmung einige GHz betragen sollte. Sie muß der Dichte des zu untersuchenden Objekts angepaßt werden, um wenig Bildstörungen und trotzdem einen

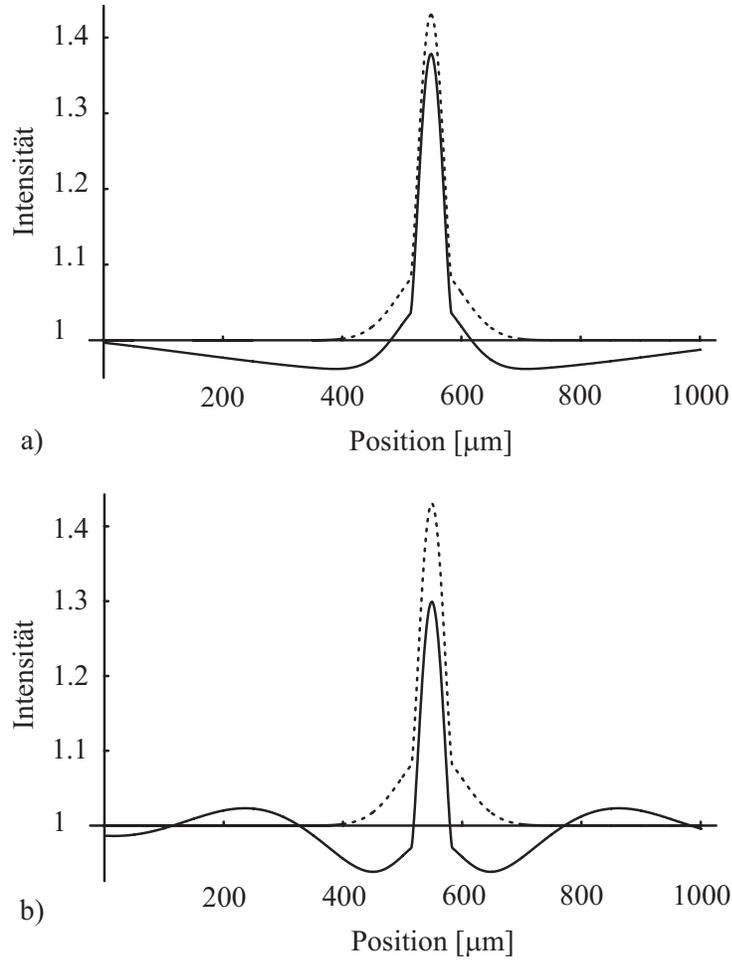


Abbildung 6.2: Schnitt durch eine phasenkontrastmikroskopische Aufnahme eines Bose-Einstein-Kondensats mit umgebender thermischer Wolke. $N = 10^6$, $T = 600 \text{ nK}$, $\mu = 140 \text{ nK}$. Gezeigt sind die Vorhersagen der analytischen (gepunktet) und der numerischen (durchgezogen) Rechnung für ein Phasenverschiebungsplättchen mit a) $45 \mu\text{m}$ b) $137 \mu\text{m}$ Radius. Ist der Radius größer, treten Störungen mit höherer Ortsfrequenz auf. Die Verstimmung beträgt 4 GHz .

guten Kontrast zu erzielen. Für typische Kondensate mit Dichten von einigen 10^{14} cm^{-3} sollte die Verstimmung etwa 4 GHz betragen. Aus den numerischen Rechnungen lernt man, daß das phasenverschiebende Bauteil einen Durchmesser von unter $100 \mu\text{m}$ besitzen sollte (siehe Abbildung 6.2). Damit die nullte Ordnung des Nachweisstrahls komplett phasenverschoben wird, muß der Fokus kleiner sein als der Durchmesser dieses Bauteils. Das heißt man sollte einen sauberen, großen Nachweisstrahl verwenden.

Literaturverzeichnis

- [And95] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [And96] M. R. Andrews, M.-O. Mewes, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle. Direct, Nondestructive Observation of a Bose Condensate. *Science*, 273:84, 1996.
- [Ari77] E. Arimondo, M. Inguscio und P. Violino. Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali metals. *Rev. Mod. Phys.*, 49:31, 1977.
- [Bay96] G. Baym und C. J. Pethick. Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 76:6, 1996.
- [Bir76] G.A. Bird. *Molecular Gas Dynamics*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [Bjo83] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth und C. Ortiz. Frequency modulation (fm) spectroscopy. *Appl. Phys. B*, 32:145, 1983.
- [Boe96] H.M.J.M. Boesten, A.J. Moerdijk und B.J. Verhaar. Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments. *Phys. Rev. A*, 54:R29, 1996.
- [Bos24] S. N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, 26:178, 1924.
- [Bra95] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet und R. G. Hulet. Bose-Einstein Condensation of Lithium. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1687, 1995.
- [Bur97] E.A. Burt, R.W. Ghrist, C.J. Myatt, M.J. Holland, E.A. Cornell und C.E. Wieman. Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from their Decay. *Phys. Rev. Lett.*, 79(3):337, 1997.
- [Cas96] Y. Castin und R. Dum. Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps. *Phys. Rev. Lett.*, 27:5315, 1996.

- [Dav95a] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969, 1995.
- [Dav95b] K. B. Davis, M.-O. Mewes und W. Ketterle. An analytical model for evaporative cooling of atoms. *Appl. Phys. B*, 60:155, 1995.
- [dG50] S. R. de Groot, G. J. Hooyman und C. A. ten Seldam. On the Bose-Einstein condensation. *Proc. R. Soc. London*, A 203:266, 1950.
- [Dre83] R. W. P. Drever und J. L. Hall. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Appl. Phys. B*, 31:97, 1983.
- [Ein24] A. Einstein. Quantentheorie des idealen einatomigen Gases. *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, 1924:261, 1924.
- [Ern98] U. Ernst, A. Marte, F. Schreck, J. Schuster und G. Rempe. Bose-Einstein condensation in a pure Ioffe-Pritchard field configuration. *Europhys. Lett.*, 41:1, 1998.
- [Fed96] P.O. Fedichev, M.W. Reynolds und G.V. Shlyapnikov. Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound s Level. *Phys. Rev. Lett.*, 14:2921, 1996.
- [Fet71] A. L. Fetter und J. D. Walecka. *Quantum Theory Of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill, 1971.
- [GO] D. Guéry-Odelin, J. Södling, P. Desbiolles und J. Dalibard. Strong evaporative cooling of a trapped cesium gas. *preprint*.
- [Gra80] I. S. Gradshteyn und I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Integral Nummer (3.365), Academic Press, Inc., 1980.
- [Gre84] T. J. Greytak und D. Kleppner. *New Trends in Atomic Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Gri95] A. Griffin, D. W. Snoke und A. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Gro95] S. Grossmann und M. Holthaus. λ -Transition to the Bose-Einstein Condensate. *Z. Naturforsch.*, 50a:921, 1995.
- [Hes85] H. Hess. Magnetic Trapping and Cooling of Atomic Hydrogen. *Bull. Am. Phys. Soc.* [2], 30:854, 1985.
- [Hes86] H. F. Hess. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Phys. Rev. B*, 34:3476, 1986.
- [Hes87] H. Hess, G. P. Kochanski, J. M. Doyle, N. Masuhara, D. Kleppner und T. Greytak. Magnetic Trapping of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 59:672, 1987.

- [Hua63] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, 1963.
- [Jr.87] L. Spitzer Jr. *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton Univ. Press, 1987.
- [Ket96a] W. Ketterle und N. J. van Druten. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Phys. Rev. A*, 54(1):656, 1996.
- [Ket96b] W. Ketterle und N. J. van Druten. Evaporative Cooling of trapped atoms. *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37:181, 1996.
- [Kun97] S. Kunze, S. Dürr, K. Dieckmann, M. Elbs, U. Ernst, A. Hardell, S. Wolf und G. Rempe. Standing Wave Diffraction with a Beam of Slow Atoms. *J. Mod. Opt.*, 44:1863, 1997.
- [Lin93] J. L. Lin und J. P. Wolfe. Bose-Einstein Condensation of Paraexcitons in Stressed Cu_2O . *Phys. Rev. Lett.*, 71:1222, 1993.
- [Lui95] O. J. Luiten, M. W. Reynolds und J. T. M. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, 53,1:381, 1995.
- [Mar97] A. Marte. Verdampfungskühlung magnetisch gespeicherter Atome. Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1997.
- [Moo71] C. Moore. *Atomic energy levels*. Washington US Department of Commerce, 1971.
- [Mya97] C. J. Myatt. *Bose-Einstein Condensation Experiments in a Dilute Vapor of Rubidium*. Dissertation, University of Colorado, 1997.
- [Nav97] P. Navez, D. Bitouk, M. Gajda, Z. Idziaszek und K. Rzazewski. The fourth statistical ensemble for the Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1789, 1997.
- [Nol88] P. J. Nolan und P. J. Twin. Superdeformed Shapes at High Angular Momentum. *Annu. Rev. Nucl., Part. Sci.*, 38:533, 1988.
- [Pet94] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher und E. A. Cornell. Behavior of atoms in a compressed magneto-optical trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11:1332, 1994.
- [Pet95] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher und E. A. Cornell. Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3352, 1995.
- [Pri89] D. E. Pritchard, K. Helmerson und A. G. Martin. *At. Phys.*, 11:179, 1989.

- [Sal91] B. E. A. Saleh und M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [Sch96] J. Schuster. Transport und Speicherung kalter Atome. Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1996.
- [Set93] I. D. Setija, H. G. C. Werij, O. J. Luiten, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans und J. T. M. Walraven. Optical Cooling of Atomic Hydrogen in a Magnetic Trap. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2257, 1993.
- [Sil86] I. F. Silvera und J. T. M. Walraven. *Progress in Low Temperature Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [Sno88] D. W. Snoke und J. P. Wolfe. Population dynamics of a Bose gas near saturation. *Phys. Rev. B*, 39:4030, 1988.
- [vLvdH96] H. B. van Linden van den Heuvell, J. T. M. Walraven und M. W. Reynolds. *Atomic Physics 15*. University of Amsterdam, 1996.
- [Wei97] C. Weiß. Bosegase in verschiedenen Gesamtheiten. Diplomarbeit, Universität Konstanz, 1997.

Danksagung

Zum Schluß dieser Arbeit möchte ich ganz herzlich all jenen Danken, die zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Mein Dank geht an Herrn Professor Rempe, der es mir ermöglicht hat in einer sehr spannenden Phase an diesem Experiment beteiligt zu sein. Er hat sich viel Zeit genommen um mit uns im Labor über das Experiment zu diskutieren und Probleme zu lösen.

Ganz herzlich möchte ich auch Urban Ernst, Johannes Schuster und Andreas Marte für die freundschaftliche Aufnahme in das BEC-Team danken. Es war nie langweilig mit Euch und ich konnte viel lernen, insbesondere von Urban die mehr technischen Seiten des Experiments und von Johannes einen eleganteren Stil während des Schreibens dieser Diplomarbeit.

An alle anderen Mitglieder der Arbeitsgruppe geht mein Dank für die unkomplizierte und freundschaftliche Aufnahme in ihren Kreis, für die Hilfsbereitschaft bei Problemen und für die gemeinsamen Geburtstagsfeiern und Grillabende.

Ich möchte Giovanni D'Impereo dafür danken, daß er schnell und sehr gut die Mechanik für das Abbildungssystem aufgebaut hat. Auch die restlichen Mitarbeiter der wissenschaftlichen Werkstätten die mir im Laufe des Jahres geholfen haben, sollen hier Erwähnung finden.

Um die $\lambda/4$ -Punkte herzustellen war Hans Ballot eine unentbehrliche Hilfe, für die ich mich herzlich bedanke.

Schließlich geht mein Dank an Urban, Johannes, Pepijn Pinkse und Axel Kuhn für das Korrigieren des Manuskripts, Christian Hettich für seine Hilfe mit Scientific Word und Christoph Weiß für das zur Verfügung stellen von Abbildung 2.3, die aus seiner Diplomarbeit stammt.

Ich bedanke mich bei der Studienstiftung des deutschen Volkes für ihre Unterstützung während des ganzen Studiums und insbesondere für die Sommerakademien.

Schließlich möchte ich meinen Eltern danken, die mir das Studium ermöglicht haben.